

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

SCUOLA POLITECNICA

DIME

**Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Energetica,
Gestionale e dei Trasporti**



**TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN
INGEGNERIA MECCANICA. ENERGIA E AERONAUTICA**

Analisi aerodinamica nel piano di Trefftz

Relatore:

Chiar.^{mo} Prof. Ing. Alessandro Bottaro

Allievo:

Simone Piccaluga

Marzo 2023

Analisi aerodinamica nel piano di Trefftz

Sommario

Questa tesi descrive l'analisi aerodinamica nel piano di Trefftz come un metodo efficace e versatile per risolvere l'equazione integro-differenziale di Prandtl per una superficie alare; il piano di Trefftz, ortogonale alla velocità di avanzamento dell'aereo, si trova a valle dell'ala, e interseca la scia generata dalla superficie alare. Con questa analisi, basata su bilanci integrali delle quantità conservate, massa, quantità di moto ed energia, è possibile calcolare il campo di moto nel piano di Trefftz e le forze aerodinamiche che si sviluppano sull'ala, portanza e resistenza indotta. Questo metodo può essere anche impiegato per strutture aeronautiche più complesse (ali comprensive di winglets, superfici portanti multiple, canards, etc.) e consente quindi la progettazione preliminare di nuove superfici aerodinamiche e/o l'ottimizzazione della forma di velivoli già esistenti. La progettazione di strutture aeronautiche con minore resistenza al moto comporta una riduzione del consumo di combustibile e si traduce quindi in un beneficio economico e ambientale.

Aerodynamic analysis in the Trefftz plane

Abstract

This thesis describes the aerodynamic analysis in the Trefftz plane as an effective and versatile method to solve Prandtl's integro-differential equation for a wing; the Trefftz plane, orthogonal to the speed of the aircraft, is located downstream of the wing and intersects the wake generated by the wing. With this analysis, based on integral balances of conserved quantities, mass, momentum and energy, it is possible to calculate the flow field in the Trefftz plane and the aerodynamic forces developing on the wing, lift and induced drag. The method can also be used for more complex aeronautical structures (wings with winglets, multiple lifting surfaces, canards, etc.) and thus allows the preliminary design of new aerodynamic surfaces and/or the optimization of the shape of existing aircrafts. The design of aeronautical structures with low drag leads to a reduction in fuel consumption and therefore translates into an economic and environmental benefit.

Ringraziamenti

In questa pagina riguardante i ringraziamenti vorrei citare fin da subito la mia famiglia che ha sempre sostenuto i miei studi, in particolare mia madre e mio padre. La loro fiducia nei miei confronti è stata di gran conforto per la preparazione e il successo di tutti gli esami per l'ottenimento di questa laurea, inoltre un ulteriore ringraziamento per aver investito su di me visto la grossa spesa economica che l'università richiede. Continuando con il nucleo familiare non posso che non citare mio fratello Davide, la sua presenza si è sempre fatta sentire per sostenermi sia nei momenti più belli che nei momenti più bui che possono capitare nella vita. Negli ultimi anni è però da riconoscere anche la presenza di Giorgia, fidanzata di mio fratello, che mi ha sempre sostenuto moralmente per i miei studi.

Vorrei ringraziare anche mia nonna Terre che fin da subito era convinta che sarei riuscito a concludere nei migliori dei modi; a livello familiare concludo ringraziando Silvia e Claudio (Pol) per avermi sempre trattato come un loro figlio e sostenuto moralmente insieme ad Alessia ed Eleonora.

Una grande ringraziamento deve essere fatto anche ai miei amici, in particolare alla compagnia di Geo, che hanno sempre creduto in me e hanno aspettato con me questo momento per festeggiare questo grande mio traguardo; la loro presenza è stata di buon conforto e dei buoni momenti di spensieratezza dallo studio

Dedico inoltre una parte dei ringraziamenti ai miei colleghi/amici di università con i quali ho dedicato grande parte dello studio e momenti di felicità all'interno dell'università, la loro presenza mi ha aiutato sia a livello scolastico che a livello morale.

Ringrazio anche i miei amici del gruppo "Camogli", la loro compagnia mi ha sempre aiutato moralmente per aver sempre sostenuto i miei studi e la fiducia che hanno sempre dimostrato nei miei confronti.

Una parte dei ringraziamenti sono per il Professor Bottaro per avermi affidato un argomento che ha suscitato il mio interesse e che ha permesso quindi una piacevole scrittura della tesi.

Ringrazio la D.A.D. Ricambi per avermi dato la possibilità di entrare in un ambito lavorativo durante il mio ultimo periodo universitario e per avermi insegnato un mestiere nuovo che mi porterò dentro per tutta la vita. Nonostante che grande parte dei colleghi fossero già degli amici l'ambiente lavorativo all'interno della ditta è stato piacevole.

In conclusione, dedico la mia tesi a tutte gli studenti che non posseggono una grande capacità d'apprendimento ma grazie alla costanza e alla determinazione riescono a raggiungere gli stessi traguardi delle persone "più intelligenti".

Indice

Sommario	II
Abstract	III
Ringraziamenti (facoltativo).....	IV
Introduzione	1
1 – Cenni storici	2
2 – Generalità sui profili alari	4
2.1 – Geometria alare	4
2.1 – Aerodinamica del profilo alare	6
2.1.1 – Flusso aerodinamico	6
2.1.2 – Descrizione forze presenti su un’ala	6
2.1.3 – Portanza	7
2.1.4 – Resistenza	8
2.1.5 – Forza Peso	8
2.1.3 – Forza d’attrito	9
3 – Ala ad allungamento finito	10
3.1 – Vortice d’estremità	10
3.2 – Teoria profili sottili	12
3.3 – Teoria linea portante	14
3.4 – Formulazione equazione di Prandtl	15
4 – Piano di Trefftz	18
4.1 – Analisi delle forze su ala ad allungamento finito.....	18
4.1.1 – Volume di controllo in prossimità dell’ala	18
4.1.2 –Volume di controllo lontano dall’ala.....	20
4.2 – Analisi delle forze per il caso dell’ala generica tridimensionale.....	21
4.2.1 – Analisi delle forze per il caso di ala allungata.....	23
4.2.2 – Analisi delle forze e delle velocità nel piano di Trefftz.....	24
4.3 – Ala ellittica	30
4.4 – Condizione di allungamento	34
4.1.1 – Analisi della retta c_1 - α	35

4.5 – Teorema di Munk	36
4.6 – Ala rettangolare	37
4.7 – Deformazioni scia a distanze maggiori.....	40
4.8 – Effetti della fusoliera	42
4.9 – Confronto tra ali aventi una configurazione piana.....	43
4.10 – Analisi di superfici con winglet.....	45
5 - Conclusioni	47
Bibliografia	48
Riferimenti figure	49
Simbologia	50

Introduzione

La presente tesi è composta da cinque capitoli in cui vengono descritti i principali aspetti dell'aerodinamica di un velivolo in fase di volo.

Nel primo capitolo, alcuni cenni storici vengono forniti, a cominciare dal primo volo svolto dai fratelli Wright; in parte del capitolo si fa riferimento anche ad aspetti motoristici del velivolo.

Nel secondo capitolo è descritta il profilo alare a livello geometrico e sono indicate le nomenclature NACA principalmente utilizzate basate sulle caratteristiche geometriche del profilo; una parte della trattazione coinvolge anche l'aerodinamica dell'ala con una spiegazione delle forze che sono presenti su queste superfici.

Nel terzo capitolo viene analizzata una superficie alare di lunghezza finita investita da un flusso; questa situazione permette di descrivere il fenomeno del vortice d'estremità e la sua influenza sulle caratteristiche aerodinamiche dell'ala. Alla fine del capitolo vengono anche descritte le teorie applicate che servono per studiare l'aerodinamica dell'ala e per l'impostazione dello studio sul piano di Trefftz.

Nel quarto capitolo si trova l'analisi sul piano di Trefftz, con una descrizione dettagliata di come viene impostata tale teoria e di come possono essere ricavate in formule semplificate della portanza e della resistenza indotta; queste formule saranno poi applicate per il caso di una configurazione alare piana ellittica e rettangolare. Tali configurazioni verranno inoltre confrontate tra di loro. Il piano di Trefftz è utilizzato anche per analizzare una configurazione alare in cui sono presenti dei winglets.

L'ultima parte è riservata alle conclusioni che si ricavano dal corretto posizionamento del piano e dei benefici che può comportare in fase di progettazione di un velivolo l'applicazione di tale studio.

I. Cenni storici

Il primo aereo aveva un motore a combustione interna, progettato nel 1860 dall'ingegnere tedesco Nikolaus August Otto. Questo tipo di motore si diffuse notevolmente nel settore automobilistico, ma causò non pochi problemi nell'aviazione, in quanto il peso elevato non era sufficiente a mantenere l'aereo in volo.

Il primo volo registrato nella storia fu effettuato il 17 dicembre 1903 dai fratelli americani Wright nel loro primo aeroplano a motore, il "Flyer"; la loro grande ingegnosità fu quella di costruire il motore endotermico in alluminio (metallo con la massima resistenza per unità di peso), il raffreddamento avveniva con liquido e la trasmissione del moto alle eliche con catene di biciclette.

L'idea di utilizzare questo tipo di trasmissione di potenza nacque anche dal loro lavoro nella propria officina di biciclette.

La seconda grande svolta nell'aviazione avvenne nel 1910, quando l'ingegnere Henry Coanda progettò e costruì il primo velivolo con un motore "a reazione", il Coanda-1910, il cui compressore era ancora alimentato dall'utilizzo di un motore endotermico a quattro cilindri.

L'inizio della prima guerra mondiale stimolò lo sviluppo tecnologico dei velivoli migliorandone le prestazioni e, alla fine della guerra, si svilupparono due correnti di pensiero: in Europa, l'attenzione si concentrò sullo sviluppo di motori in linea, più facili da costruire e meno ingombranti, e l'introduzione del raffreddamento a liquido ne migliorò notevolmente l'efficienza. In America si cercarono metodi per migliorare i motori radiali, che erano più complicati da costruire; per aumentarne la potenza tali motori richiedevano un aumento delle dimensioni nella parte frontale, con conseguenti maggiori perdite aerodinamiche. L'utilizzo del motore radiale consentiva ai piloti di continuare a volare con meno difficoltà in caso di guasto o danneggiamento del motore e di effettuare eventuali manovre di emergenza.

Durante la Seconda guerra mondiale si verificò una nuova fase di sviluppo tecnologico nell'aviazione con l'obiettivo di aumentare la potenza e l'efficienza del motore: in questo periodo furono costruiti i primi velivoli con compressore multistadio e raffreddamento a liquido pressurizzato: nascono così i primi turbocompressori per l'aviazione.

In seguito, per superare i limiti di velocità raggiungibili con i turbocompressori ad elica (la velocità massima raggiunta era di circa 700 km/h) furono sviluppati dagli ingegneri Hans von Ohain e Frank Whittle i motori a reazione: questo tipo di motore garantiva alte prestazioni e permetteva di raggiungere la velocità di suono.

I motori più comunemente utilizzati oggi nell'aviazione sono ancora i motori a turbina a gas (turbojet, turbofan e turboelica) e turbofan ad elica.

Oltre alla potenza erogata e alla tipologia del motore, negli anni ci si è resi conto che per aerodinamici del velivolo, in particolare dell'ala.

“L'ala” è il termine usato per definire una superficie con un determinato assetto che viene investito da un fluido e da esso riesce a generare forze aerodinamiche causate dalla variazione di velocità e di pressione.

Negli anni sono state ideate diverse tipologie e forme di ali per adattare il velivolo alle esigenze di volo; i primi aerei presentavano una struttura multi-ala (biplano e triplano) che rendevano la struttura molto stabile a discapito dell'aerodinamicità.

Successivamente si è passati ad una struttura monoplano con una dimensione dell'ala particolare per ogni condizione di volo. Per scopi commerciali, ad esempio, si usano ali di

elevate dimensioni mentre per scopi militari vengono usate ali di dimensioni più ridotte per rendere l'aereo più manovrabile.

Inoltre, ulteriori studi sull'aerodinamica dell'ala hanno permesso di aggiungere su questa superficie dispositivi come flaps, slats o winglets, per migliorare le condizioni di volo. Questa tesi si prefigge lo scopo di effettuare uno studio dell'ala per capire meglio il suo funzionamento e per trovare un sistema per il calcolo delle forze che si generano nel momento in cui l'ala è investita da una corrente fluida.

II. Generalità sui profili alari

2.1. Geometria ala

L'elemento strutturale che permette il volo dell'aereo è l'ala, questa superficie ha la funzione principale di generare una forza perpendicolare alla direzione del flusso per mantenere in aria il velivolo.

La progettazione corretta di un'ala permette all'aereo di avere vantaggi dal punto di vista aerodinamico; per far ciò bisogna disegnare un profilo alare; per profilo alare s'intende la sezione trasversale di un'ala dal bordo di entrata al bordo d'uscita.

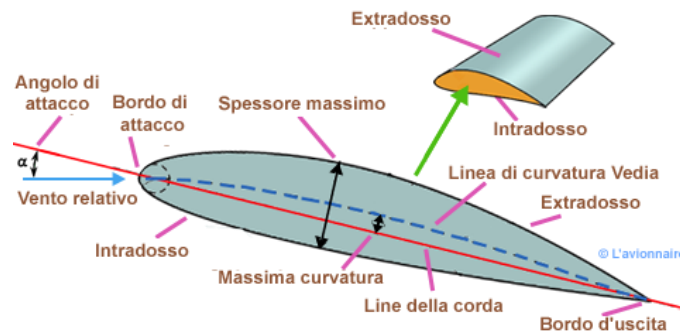


Figura.2.1. Profilo alare [1]

In figura 2.1 è mostrato un generico profilo alare in cui sono messi in evidenza concetti geometrici legati all'ala:

- La corda (camber line "c") : la linea che collega il bordo d'ingresso (Leading Edge, in letteratura L.E) al bordo d'uscita (Trailing Edge, in letteratura T.E.).
- Angolo di attacco (angle of attack " α "): è l'angolo formato tra l'intersezione della corda e la direzione del flusso.
- Linea di curvatura (linea mediana alare): è la linea dei punti equidistanti dall'intradosso e dall'extradosso del profilo.
- Intradosso: superficie del profilo in pressione.
- Extradosso: superficie del profilo in depressione.
- Spessore massimo: rappresenta il valore massimo raggiunto dallo spessore del profilo alare.
- Massima curvatura: è la zona in cui la distanza tra corda e la linea di curvatura è massima.

Lo spessore massimo e la massima curvatura sono parametri geometrici che caratterizzano ogni profilo alare; ogni profilo alare presenta una nomenclatura che fa riferimento ad enti internazionali, la più usata, con il maggior numero di profili aerodinamici classificati, è la "NACA".

Dopo la sigla generalmente è presente una successione di numeri (maggiore è il numero di cifre e più complesso è il profilo alare); per il caso di "NACA $X_1X_2X_3X_4$ "

- X_1 : definisce la massima curvatura espressa in percentuale.

- X_2 : fornisce la distanza del punto di massima curvatura dal bordo d'attacco espressa come percentuale della corda e in multipli di 10.
- X_3X_4 : definiscono il massimo spessore del profilo alare espressa come percentuale della corda.

Nel caso in cui si debba dare riferimento al “NACA $X_1X_2X_3X_4X_5$ ”

- X_1 : definisce la massima curvatura espressa in percentuale.
- X_2 : fornisce la distanza del punto di massima curvatura dal bordo d'attacco espressa come percentuale della corda e in multipli di 10.
- X_3 : rappresenta il coefficiente di portanza moltiplicato per 10 all'angolo di incidenza pari a zero.
- X_4X_5 : indica lo spessore massimo proporzionale alla corda, questo numero è espresso in percentuale.

Sempre dal punto di vista geometrico, altri fattori rilevanti che riguardano l'efficienza di un'ala di un aereo sono l'apertura e la superficie alare. Tramite questi due parametri geometrici è possibile calcolare il rapporto di allungamento (aspect ratio, AR, in Inglese) che è un parametro che caratterizza le prestazioni fluidodinamiche e la manovrabilità dell'aereo, questa grandezza adimensionale si ricava applicando la seguente formula:

$$AR = \frac{b^2}{S}$$

dove b = apertura alare [m], cioè la distanza tra i due apici dell'ala. Inoltre si ha:

$$S = \text{superficie alare} = b \int_{\text{hub}}^{\text{tip}} c(x) dx \quad [m^2]$$

c = corda [m]

In generale il posizionamento degli assi cartesiani sull'aereo è mostrato in figura 2.2 e questo sistema di riferimento è utile per il calcolo delle lunghezze e dei vettori delle forze sull'aereo:

- Asse x (asse di rollio): asse lungo il quale avviene la direzione di volo aereo
- Asse y (asse di beccheggio): asse trasversale all'aereo sul quale si dimensiona l'ala
- Asse z (asse d'imbardata): asse diretto verso l'alto

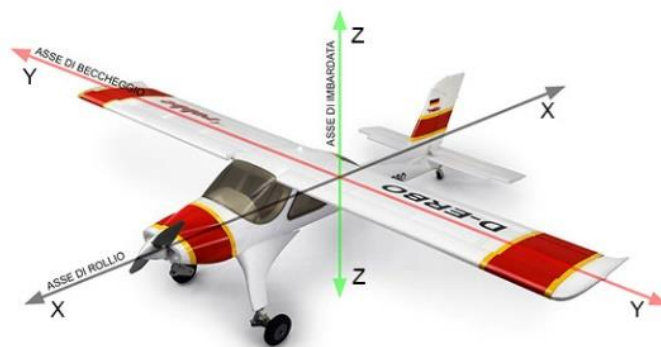


Figura 2.2. Posizionamento assi cartesiani [2]

2.2. Aerodinamica del profilo alare

2.2.1. Flusso aerodinamico

L'aerodinamica di un aereo è ancora un oggetto di studio per migliorare e ottimizzare i suoi parametri operativi e prestazionali.

Prima di andare ad analizzare le forze aerodinamiche che coinvolgono il profilo alare è necessario analizzare il flusso d'aria che investe l'ala. Si fa spesso riferimento ad un flusso potenziale, ovvero ad un campo della velocità del flusso inteso come gradiente di una funzione scalare. La velocità di un flusso può essere calcolata come:

$$\nabla\varphi = V_{\infty}(x, y, z) \quad (2.1)$$

La condizione necessaria affinché un potenziale di velocità possa essere definito è che il campo di moto sia irrotazionale; quindi, il flusso presenta vorticità ω nulla. Questa teoria inizia ad essere ristrettiva nel caso tridimensionale se si fa riferimento alla presenza di vortici presenti a distanze molte lontane dall'ala; la vorticità che è definita come il rotore della velocità (2.2) non è nullo per questa casistica:

$$\omega = \nabla \times V_{\infty} \quad (2.2)$$

L'analisi aerodinamica sulla scia generata dall'ala avviene nell'ipotesi di flusso potenziale (cioè irrotazionale).

2.2.2. Descrizione delle forze presenti su un'ala

Per garantire una buona aerodinamicità del velivolo è opportuno analizzare e descrivere le forze in gioco durante il volo dell'aereo, raffigurate in figura 2.3, cioè la portanza L e la resistenza D . La direzione di tali forze dipende dalla direzione del flusso, mentre la forza normale N e la forza di attrito A posseggono una direzione dipendente alla superficie alare.

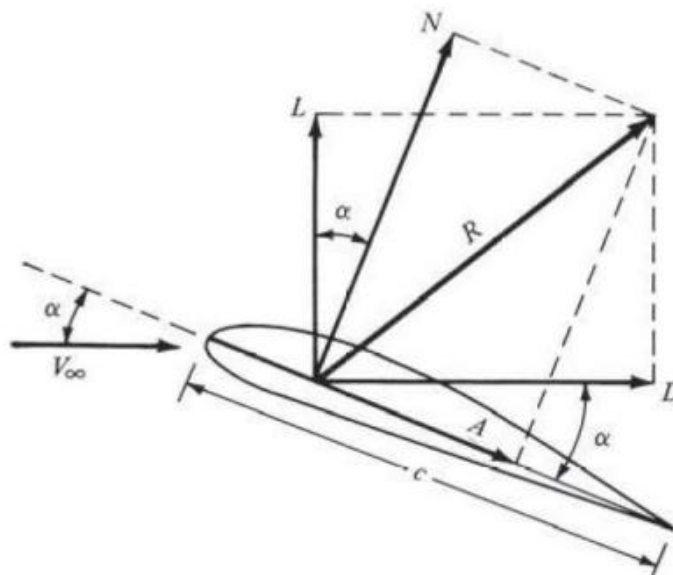


Figura 2.3. Correlazioni tra le forze in gioco [3]

2.2.3 Portanza (Lift)

La portanza è la forza perpendicolare alla direzione di volo del flusso d'aria che coinvolge l'aereo e che tende a mantenere in sostentamento il velivolo se risulta maggiore della forza peso.

La portanza si crea grazie al gradiente di pressione che si forma tra l'estradosso e l'intradosso del profilo alare tramite la deflessione che subisce il flusso; quando l'intradosso presenta una pressione maggiore rispetto all'estradosso allora si genera una differenza di pressione verso l'alto che permette all'aereo di sostenersi in volo. Tale fenomeno è schematizzato nella figura 2.4 in cui è raffigurato un profilo alare bidimensionale investito da un flusso.



Figura 2.4. Rappresentazione della formazione del Lift [4]

La presenza della portanza per un profilo è descritta dal teorema di Kutta-Zukovskij [1] in cui si sostiene che in un campo potenziale la portanza per unità di apertura alare agente su un corpo (profilo alare) in un flusso irrotazionale è il prodotto della circolazione attorno alla sezione del corpo stesso, per la densità e per la velocità relativa del flusso indisturbato rispetto al corpo:

$$l = \rho V \Gamma \quad (2.3)$$

dove:

l = portanza per unità di apertura alare [N/m^2]

ρ = densità del fluido [Kg/m^3]

V = velocità di avanzamento del profilo [m/s]

Γ = circolazione [m^2/s]

La circolazione è legata all'interazione del flusso con l'ala che provoca un'accelerazione del flusso all'estradosso ed un rallentamento del flusso all'intradosso; usando una simulazione numerica nell'ipotesi di flusso irrotazionale si mostra facilmente questo fenomeno, analizzando un tubo di corrente che attraversa un profilo alare. In figura 2.5 si può osservare come le particelle d'aria dirette lungo l'estradosso si muovano più velocemente.

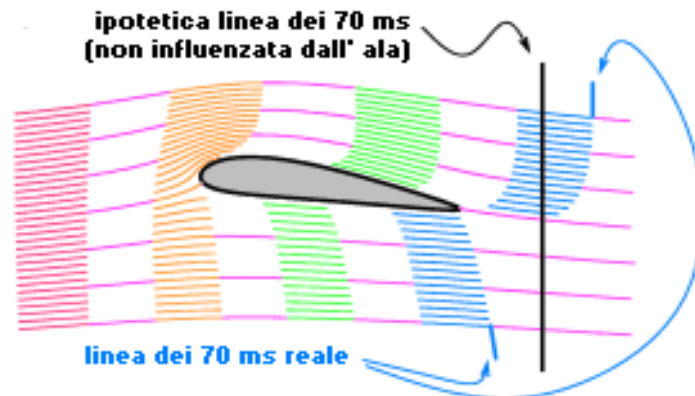


Figura 2.5. Analisi tubo di corrente su profilo alare [5]

2.2.4. Resistenza (Drag)

La resistenza è definita come la forza che si oppone all'avanzamento dell'aereo, infatti, la direzione di questa forza è parallela alla direzione del flusso incidente, ma ha verso opposto.

Per un moto incomprimibile, questa forza è data dall'insieme di tre contributi:

- Resistenza di Forma
- Resistenza di Attrito
- Resistenza indotta dalla portanza

Per calcolare la resistenza totale di un velivolo si applica la seguente formula:

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 c_d S \quad (2.4)$$

dove:

D = Resistenza [N]

c_d = coefficiente di resistenza

ρ = densità fluido [Kg/m^3]

V = velocità avanzamento aereo [m/s]

S = superficie alare [m^2]

I contributi di resistenza legati alla pressione (resistenza d forma) e alla viscosità (resistenza d'attrito) possono essere valutati anche tramite un'analisi bidimensionale mentre la resistenza indotta dalla portanza è valutabile solamente nel caso in cui si analizzi un'ala tridimensionale avente un'apertura finita. L'analisi nel piano di Trefftz permette proprio di stimare una tale resistenza, che esiste solamente per corpi portanti.

2.2.5. Forza Peso

La forza peso è la forza di volume che si esercita sull'ala per effetto dell'accelerazione di gravità. Per il calcolo di tale forza basta essere a conoscenza della massa del corpo:

$$W = m g \quad (2.5)$$

dove:

W = Peso [N]

m = massa profilo alare [Kg]

g = accelerazione gravitazionale [m/s^2]

2.2.6. Forza di attrito e forza normale

È la forza dovuta all'attrito tra l'aria (in moto relativo) e la parete dell'ala, ed è causata dalla viscosità del fluido. E' orientata nella direzione della corda e può essere calcolata integrando lo sforzo di attrito τ lungo la parete dell'ala, lungo intradosso ed estradosso, con τ definito da:

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\text{wall}} \quad (2.6)$$

dove:

μ = viscosità dinamica del fluido [Pa s]

u = velocità tangente alla parete [m/s]

n = direzione normale alla parete [m]

Chiaramente la forza di attrito non può essere valutata nel caso di flusso nel quale sia stata fatta l'approssimazione di viscosità nulla. Analogamente, malgrado lo sforzo non sia necessariamente nullo quando la viscosità è diversa da zero, la forza di attrito su un volumetto elementare è pari a zero nel caso di moto irrotazionale.

La forza normale N invece risulta essere una forza perpendicolare alla superficie e può essere valutata analizzando il gradiente di pressione che si forma sulla superficie alare.

Le forze analizzate possono essere correlate tra di loro attraverso le relazioni che seguono:

$$L = N \cos(\alpha) + A \sin(\alpha) \quad (2.3)$$

$$D = N \sin(\alpha) - A \cos(\alpha) \quad (2.4)$$

dove α è l'angolo d'incidenza del profilo.

III. Ala ad allungamento finito

3.1. Vortice di estremità

La formazione di vortici durante il volo di un aereo è strettamente legata alla dimensione dell'ala.

Abbandonando la teoria di un'ala di apertura infinita, si può notare, come rappresentato in figura 3.1, che un aereo in volo forma dei vortici ai vertici dell'ala che influenzano i parametri operativi e quindi anche le prestazioni dell'ala e del velivolo.



Figura 3.1. Vortice di fondo ala generato da un aereo [6]

Questo fenomeno può essere facilmente spiegato considerando un'ala di lunghezza finita investita da un flusso d'aria; si è notato che per generare la portanza è necessario che sull'intradosso si abbia un valore della pressione maggiore rispetto all'estradosso.

Questa condizione permette di avere portanza ma costituisce un problema per il flusso che attraversa l'estremità dell'ala; infatti, si dimostra facilmente che le linee di corrente attraversanti il profilo alare hanno un comportamento molto differente dalle condizioni ideali.

Dalla figura 3.2 si può osservare che il flusso, risentendo del gradiente di pressione, è deviato e sull'estradosso le linee di corrente si dirigono verso l'interno mentre all'intradosso le linee di corrente vengono deviate verso l'esterno.

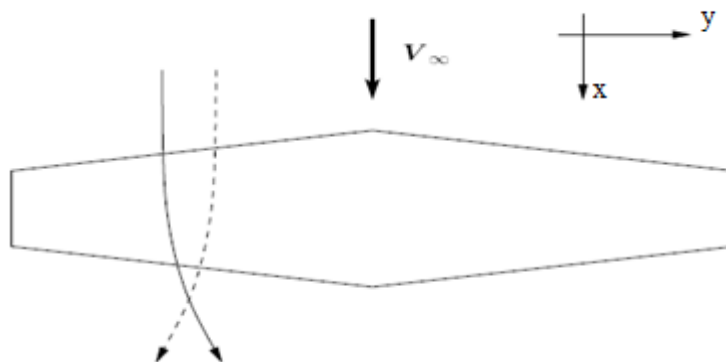


Figura 3.2. Comportamento del flusso sull'ala [7]

Il flusso presente sull'estremità dell'ala risente molto di questo effetto e tende a passare dalla zona di alta pressione alla zona di bassa pressione; tale movimento fa sì che si generi un vortice detto "vortice di estremità" che si sviluppa a valle dell'ala.

In figura 3.3 B è rappresentata la formazione del vortice su entrambe le estremità alari per il passaggio del flusso dall'intradosso all'estradosso.

Il movimento creato dai due flussi genera dei vortici i quali presentano una componente di velocità chiamata "velocità di downwash" avente direzione verso il basso; la presenza di questa velocità fa variare la visione dell'ala sul flusso cambiando così l'angolo effettivo. L'effetto di tale cambiamento comporta una variazione della circolazione e quindi anche del coefficiente di portanza; la differenza di questi parametri dalle condizioni ideali compromette quindi le prestazioni dell'ala ma anche di tutto l'aereo. Il comportamento del flusso sull'ala può essere mostrato in figura 3.3 dove nella figura A viene confrontato il comportamento reale del Lift rispetto alle condizioni ideali (le frecce di sinistra, in rosso, mostrano una distribuzione di portanza uniforme, tipica del caso di un'ala rettangolare di apertura infinita). Da quando appena espresso è chiaro che il valore reale della portanza sull'ala risulta minore rispetto alla configurazione ideale.

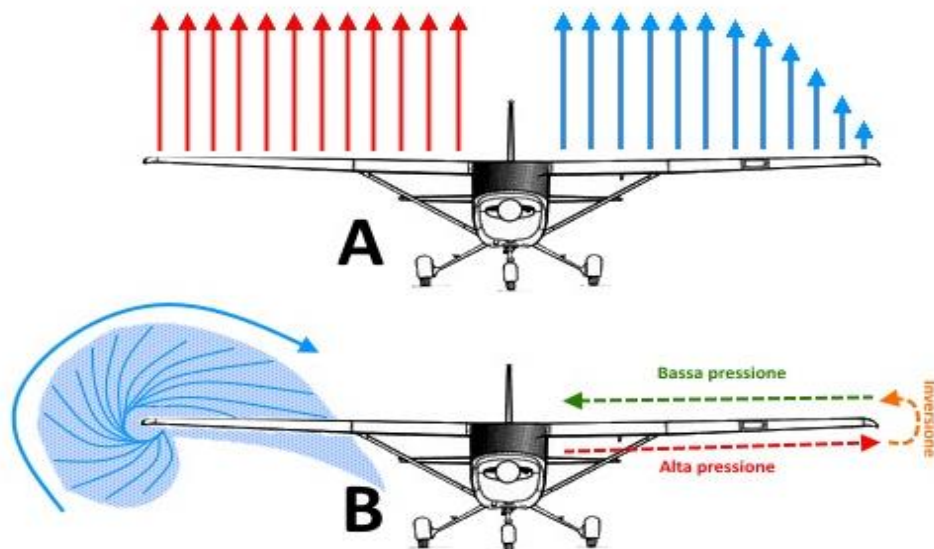


Figura 3.3. Formazione ed effetti del vortice di estremità [8]

La figura 3.3 evidenzia l'influenza dei vortici sulle prestazioni dell'ala, tali vortici generano una resistenza detta "resistenza indotta dalla portanza".

Per descrivere tale forza dobbiamo ricordare che la portanza è sempre una forza perpendicolare alla direzione del flusso e che nel caso tridimensionale di ala di lunghezza finita è presente anche un'altra velocità (la velocità di "downwash") oltre a quella del flusso.

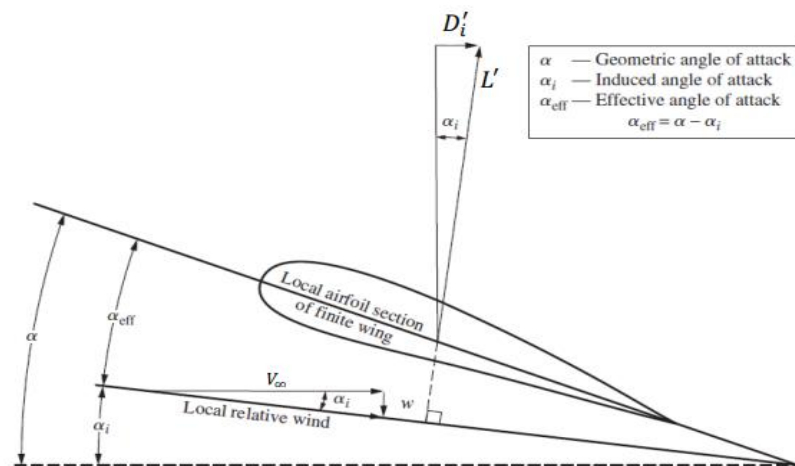


Figura 3.4. Angolo di incidenza effettivo [3]

Dalla figura 3.4 si può osservare che il vettore della velocità \mathbf{V}_{eff} effettiva del flusso è dato dalla somma vettoriale della velocità di flusso \mathbf{V}_{∞} e dalla velocità di downwash w_{wake} :

$$\mathbf{V}_{eff} = V_{\infty} \hat{x} + w_{wake} \hat{z} \quad (3.1)$$

Il cambiamento della direzione di velocità permette all'ala di vedere un differente angolo d'incidenza rispetto dalle condizioni iniziali:

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i \quad (3.2)$$

dove:

α_{eff} = angolo d'incidenza effettivo

α_i = angolo indotto

Il calcolo dell'angolo indotto avviene analizzando il triangolo delle velocità, mostrato in figura 3.4, e da esso si ottiene che:

$$\alpha_i = \arctg \frac{-w_{wake}}{V_{\infty}} \quad (3.3)$$

La presenza di un angolo indotto permette all'ala di vedere sperimentare minori angoli di incidenza del flusso (rispetto al valore geometrico dell'angolo stesso), facendo così variare il valore della portanza. Molto più rilevante è la variazione della sua direzione; questa forza ora presenta una componente verticale necessaria a sovrastare (o equilibrare la forza peso) ma presenta anche una componente orizzontale D_i che si va a sommare alla resistenza (di attrito e di pressione).

La forza D_i è chiamata "resistenza indotta dalla portanza"; questa forza può essere analizzata sfruttando diverse teorie, tra cui quella del piano di Trefftz.

3.2. Teoria dei profili sottili.

La teoria dei profili sottili è fondamentale per determinare l'aerodinamica dei profili alari aventi un limitato spessore; tramite questa teoria si riesce infatti a legare il coefficiente di portanza con l'angolo d'incidenza.

La trattazione di questa teoria avverrà in maniera semplificata poiché di nostro interesse è solo il risultato che verrà ripreso nella formulazione della linea portante.

Le ipotesi iniziali sono:

1. Flusso bidimensionale
2. Flusso incomprimibile
3. Flusso stazionario
4. Profilo sottile

Con queste ipotesi il foglio vorticoso presente sul profilo può essere analizzato posizionandolo lungo la corda coincidente con l'asse delle x come rappresentato in figura 4.4 in cui il flusso un profilo è investito da una corrente con un'incidenza pari ad α .

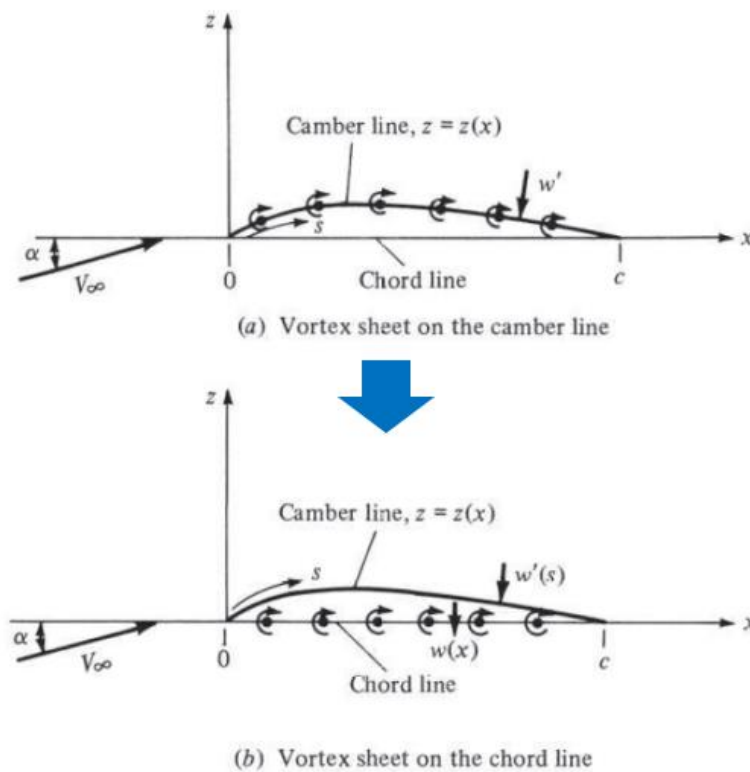


Figura 3.5. Teoria dei profili sottili [3]

Attraverso il passaggio in un piano immaginario per semplificare il fenomeno grazie alle trasformazioni di Joukowski,[2], all'utilizzo degli integrali di Glauert [3] e alla condizione di Kutta [4] si arriva al risultato che:

1. Il centro di spinta è situato in una posizione ad un quarto della corda partendo dal bordo d'ingresso
2. Il gradiente della curva portanza/angolo d'incidenza è pari a 2π

Da quest'ultimo risultato quindi si può capire che risolvendo $\frac{dc_l}{d\alpha}$ per un profilo sottile si ottiene:

$$c_l = c_{l=0} + 2\pi\alpha \quad (3.4)$$

Dove:

$c_{l=0}$ = coefficiente di portanza per incidenza del flusso nulla

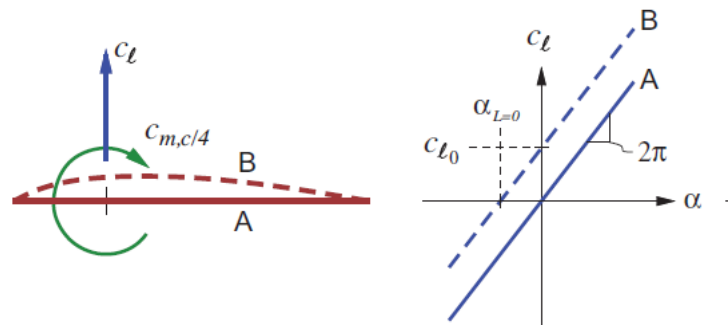


Figura 3.6 Profilo sottile [9]

Il comportamento della linea “A” di figura 3.6 è tipica delle ali simmetriche per cui la camber line presenta un andamento rettilineo sull’asse; per questi profili $c_{l=0}$ risulta pari a zero. I profili che possiedono un comportamento della linea “B” invece sono i profili alari asimmetrici in cui la linea media ha un comportamento curvo; la particolarità di queste ali è la capacità di generare portanza anche quando l’angolo d’incidenza è pari a zero poiché $c_{l=0}$ è differente da zero.

3.3. Formulazione della linea portante

Dal secondo teorema di Helmholtz [4] si ottiene che un filamento vorticoso non può finire nel fluido; se il fluido attraversa una superficie e provoca una variazione della circolazione si genera un vortice (a “ferro di cavallo”) che finisce all’infinito e per il quale si può definire un’intensità:

$$\gamma = \frac{d \Gamma_{wake}}{dy} = \frac{d\Gamma}{dy} \quad (3.5)$$

dove:

γ = intensità vortice [m^2 / s]

In linea al principio appena enunciato è evidente che su tutta la superficie alare di lunghezza finita si genera un insieme di filamenti vorticosi come è mostrato in figura 3.7, cioè un “foglio vorticoso”.

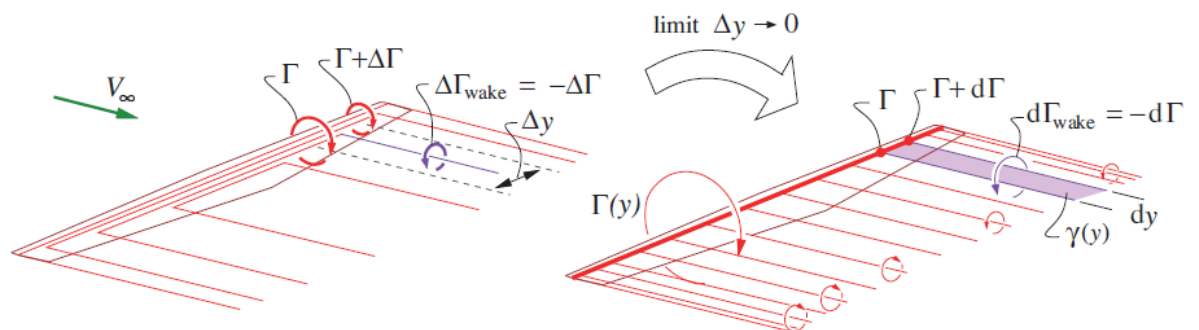


Figura 3.7. Applicazione del teorema di Helmholtz lungo una superficie alare [9]

Ad ogni vortice è necessariamente associata una velocità di downwash w_{wake} (4.4) con un corrispondente angolo indotto α_i (3.3).

Considerando il flusso bidimensionale e applicando la teoria dei profili sottili è evidente che il coefficiente di portanza (3.6) dipenderà dall'angolo effettivo tenendo anche conto dell'angolo indotto dal vortice. Ciò implica che:

$$c_l = c_{l\alpha} \alpha_{eff} = c_{l\alpha} (\alpha + \alpha_{L=0} - \alpha_i) \quad (3.6)$$

dove:

$c_{l\alpha} = 2\pi$ per profilo sottile, pendenza della curva di portanza

α = angolo d'incidenza

$\alpha_{L=0}$ = angolo aerodinamico

α_i = angolo indotto

3.4. Formulazione dell'equazione di Prandtl

Fino ad ora si è analizzata la scia in maniera molto semplificativa senza estrarre un'equazione che descriva l'aerodinamica di un'ala; questa equazione però è possibile ottenerla ed è chiamata "equazione integro differenziale di Prandtl" [6]. Nei paragrafi successivi viene descritto il comportamento del flusso uscente dall'ala in cui è presente inizialmente un comportamento bi-dimensionale per poi passare ad una configurazione tri-dimensionale e infine il flusso ritornare alle condizioni bi-dimensionali nel piano y-z.

In prossimità all'ala il flusso bi-dimensionale può essere analizzato nel piano x-z; grazie alla nota posizione di ogni punto lungo l'apertura alare è possibile risolvere il problema tramite il piano di Trefftz anche se l'unica nozione mancante è all'infinito, ciò vuol dire che il comportamento a zero della scia nel dominio distante all'ala determina il comportamento all'infinito nel dominio posto vicino all'ala. Nel dominio distante all'ala la scia si riduce ad una linea nella direzione x mentre lungo l'asse y presenta una distribuzione di circolazione. Il problema della scia subito dopo l'ala è tri-dimensionale, ma intersecando tutte le scie generate dall'ala con un piano y-z il campo di moto risulta essere bi-dimensionale e la scia può essere schematizzata come una discontinuità, di spessore infinitesimo.

Analizzando la scia che si genera a valle del bordo d'uscita dell'ala e che si prolunga fino all'infinito (a valle), si consideri una seconda scia che parte da una posizione infinita (a monte) e arriva fino al bordo del profilo alare. Si nota che la componente di velocità finale di downwash delle due scie è costante lungo l'asse x poiché il campo di moto delle due scie è simmetrico (è nulla all'infinito a monte e converge ad un valore costante all'infinito a valle).

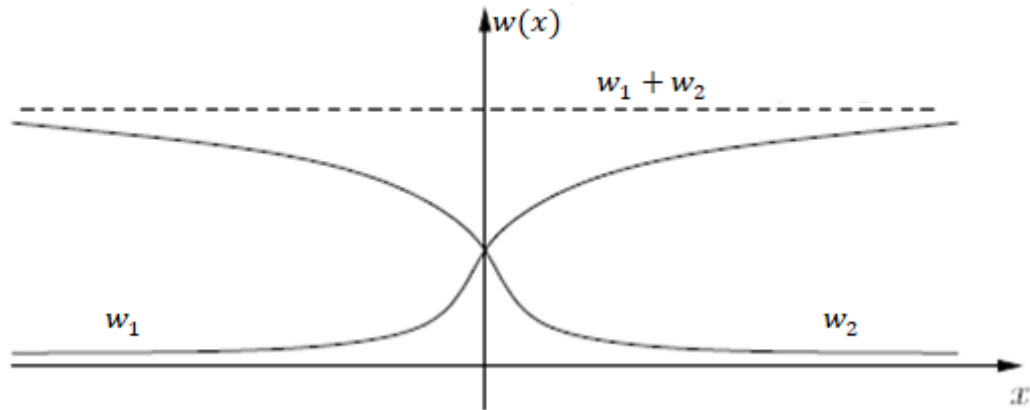


Figura 4.20. Velocità indotta sulla scia [7]

Nonostante che non si conosca il comportamento specifico della velocità indotta, per le condizioni di simmetria la velocità indotta nel punto $x=0$ deve risultare la metà rispetto alle condizioni all'infinito. Per avere uno studio della scia in un punto qualunque dell'apertura alare è necessario sommare la velocità del flusso in arrivo con la velocità indotta della scia in $x=0$.

La velocità indotta risulta essere la metà della velocità ottenuta dall'espressione

$$w(y_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y)}{dy} \frac{dy}{y - y_0} \quad (3.7)$$

con y_0 un punto qualunque lungo l'apertura.

La portanza che si sviluppa sull'ala su ogni sezione dipende dal coefficiente di portanza per un determinato angolo d'incidenza:

$$\alpha_{eff}(y) = \alpha - \alpha_{L=0}(y) - \alpha_i \quad (3.8)$$

dove:

$\alpha_{L=0}(y)$ = angolo d'incidenza nulla nel punto y

$$\alpha_i = \arctg\left(-\frac{w(y)}{V_\infty}\right)$$

La portanza in un determinato punto lungo l'apertura alare è:

$$dL = \rho \frac{V_\infty^2}{2} c(y) c_l \alpha_\infty(y) dy \quad (3.9)$$

In questo caso la distribuzione della circolazione è nota ma nella realtà dipende dalla velocità indotta dalla scia sull'ala; per ottenere la distribuzione della circolazione e della velocità indotta bisogna applicare contemporaneamente l'equazione (3.7) e la distribuzione della circolazione $\Gamma(y)dy$ nella sezione dy dell'ala. Per il teorema di Kutta-Joukowski la circolazione è:

$$\Gamma(y)dy = \frac{dL}{\rho V_\infty} = \frac{1}{2} V_\infty c(y) c_l \alpha_\infty(y) dy \quad (3.9)$$

Dividendo ulteriormente per la velocità d'ingresso e supponendo un legame lineare tra il coefficiente di portanza e l'angolo d'incidenza:

$$\frac{\Gamma(y)}{V_\infty} = \frac{1}{2} V_\infty c(y) c_i' [\alpha - \alpha_0(y) - \alpha_i] \quad (3.10)$$

dove:

c_i' = pendenza della curva di portanza (2π per profili sottili)

Per piccola incidenza l'angolo indotto è pari all'argomento della tangente; inserendo il valore trovato della resistenza si ottiene quindi:

$$\frac{\Gamma(y)}{V_\infty} = \frac{1}{2} V_\infty c(y) c_i' [\alpha - \alpha_0(y)] + \frac{c(y) c_i'}{8\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d(\Gamma/V_\infty)}{dy'} \frac{dy'}{y' - y} \quad (3.11)$$

L'equazione ottenuta è chiamata "equazione integro-differenziale di Prandtl" e l'unica incognita risulta essere $\frac{\Gamma(y)}{V_\infty}$. Tale equazione può essere risolta in maniera numerica con un metodo iterativo partendo da una stima della distribuzione di velocità indotta o in maniera analitica attraverso la trasformata di Fourier della circolazione. Tale metodo implica quindi che la risoluzione dell'equazione avvenga tramite l'applicazione del piano di Trefftz, descritto nel capitolo successivo. Attraverso queste due metodologie si riescono a ricavare le distribuzioni di circolazione e di velocità indotta sul profilo; da esse è poi possibile calcolare la portanza e la resistenza indotta.

IV. Piano di Trefftz

4.1. Analisi delle forze su ala ad allungamento finito

Nei paragrafi precedenti sono state indicate le forze che si generano sull'ala senza che venisse ricavata una formula per poterle calcolare in fase di progettazione. Per il calcolo delle forze bisogna definire un volume di controllo che può essere posizionato in vicinanza all'ala o un volume di controllo che invece ricopre una zona più ampia, tale da essere considerato distante dall'ala. La scia è interpretata in questo studio come una linea di corrente [6]; per questo motivo imponendo delle condizioni al contorno la scia deve essere calcolata come una parte della soluzione del sistema applicando le equazioni di conservazione in forma integrale. Il sistema incomprimibile e irrotazionale è risolvibile dall'equazione di Laplace dove l'incognita risulta essere il potenziale di velocità φ :

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.1)$$

Il flusso irrotazionale che investe il profilo non penetra lungo la superficie alare e diventa costante ad una distanza infinita; tali condizioni a livello fisico possono essere scritte come segue:

$$\nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.2)$$

$$\nabla \varphi(\infty) = V_\infty \quad (4.3)$$

Nel caso tri-dimensionale dell'ala ad allungamento finito, la scia può essere schematizzata come una superficie di spessore infinitesimo generato da infinite linee di corrente che si staccano dal bordo d'uscita (che per ipotesi è aguzzo) dell'ala; il potenziale della scia ammette una discontinuità lungo l'apertura alare. La condizione di trasporto lagrangiano del potenziale ha la forma:

$$\frac{d\Delta\varphi(y)}{dt} = 0 \quad (4.4)$$

Oltre al potenziale risultano essere un'incognita la forma della scia e il punto di distacco della linea di corrente dall'ala; quest'ultima incognita però può essere trascurata imponendo la condizione di Kutta [4] in cui il flusso si distacca dall'ala proprio dal bordo d'uscita. Usando questa condizione si impone quindi che la circolazione attorno al profilo è uguale alla differenza di potenziale tra la superficie superiore e inferiore:

$$\Gamma = \Delta\varphi \quad (4.5)$$

4.1.1. Volume di controllo in prossimità dell'ala

In questo sistema il volume di controllo [7] comprende l'ala e quindi sarà necessario analizzare tutte le forze che sono presenti su di esso; riprendendo la figura 4.1 le forze in gioco sull'ala sono principalmente le forze viscosive (4.5) e le forze di pressione (4.6); esse agiscono sulla superficie S_{body} del profilo alare.

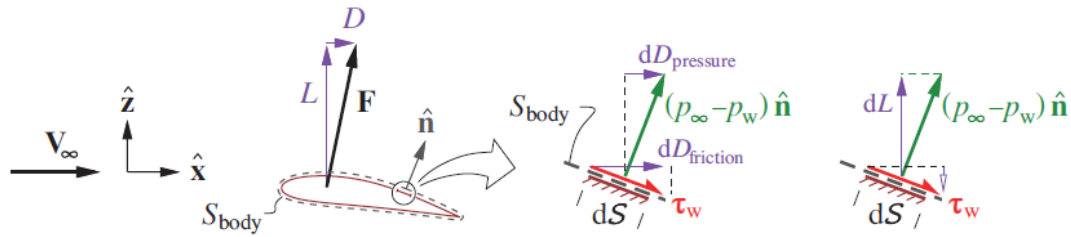


Figura 4.1. Volume di controllo in prossimità dell'ala [9]

La generica forza totale, dal principio della quantità di moto, sarà data dalla somma di due contributi:

$$\mathbf{F}_{friction} = \iint \boldsymbol{\tau}_w dS \quad (4.6)$$

$$\mathbf{F}_{pressure} = \iint -p_w \hat{\mathbf{n}} dS = \iint (p_\infty - p_w) \hat{\mathbf{n}} dS \quad (4.7)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{pressure} + \mathbf{F}_{friction} \quad (4.8)$$

dove:

$\boldsymbol{\tau}_w$ = trazione sulla superficie dS legata alla viscosità [N/m^2]

p_w = pressione sulla superficie dS [Pa]

p_∞ = pressione atmosferica uniforme [Pa]

Analizzando l'asse x per il calcolo della resistenza totale si segue lo stesso ragionamento fatto in precedenza visto che essa è ottenuta dalla somma tra la resistenza viscosa (4.10) e di pressione (4.11):

$$D = D_{pressure} + D_{friction} \quad (4.9)$$

$$D_{friction} = \iint \boldsymbol{\tau}_w \cdot \hat{\mathbf{x}} dS \quad (4.10)$$

$$D_{pressure} = \iint -p_w \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint (p_\infty - p_w) \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (4.11)$$

Le ultime forze che rimangono da descrivere sono la portanza e la forza trasversale Y :

$$L = \iint -p_w \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint (p_\infty - p_w) \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (4.12)$$

$$Y = \iint -p_w \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint (p_\infty - p_w) \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (4.13)$$

In queste due forze (L , Y) non vengono inseriti i contributi viscosi perché per alti valori di Reynolds i contributi legati alla pressione sono preponderanti.

Le forze descritte in un'analisi CFD sono facili da calcolare, includendo anche i termini viscosi, altrimenti, si possono utilizzare altri metodi più semplici, come il metodo a pannelli, per il calcolo di L e Y ; tale metodo non può essere usato per il calcolo della resistenza visto che $D_{pressure}$ presenta termini positivi e negativi che si annullano tra di loro.

Da quanto detto si arriva quindi al paradosso di D'Alembert [8] in cui in un sistema bidimensionale in moto irrotazionale e stazionario la resistenza è pari a zero.

Nel sistema tri-dimensionale queste grandezze sono più difficili da calcolare se si conta la viscosità del flusso visto che provoca una variazione della pressione p_w sul profilo; questa variazione provoca anche un cambiamento per il calcolo della portanza in caso di

separazione del flusso e un valore differente da zero della resistenza di pressione $D_{pressure}$. In figura 4.2 si può osservare il fenomeno appena descritto.

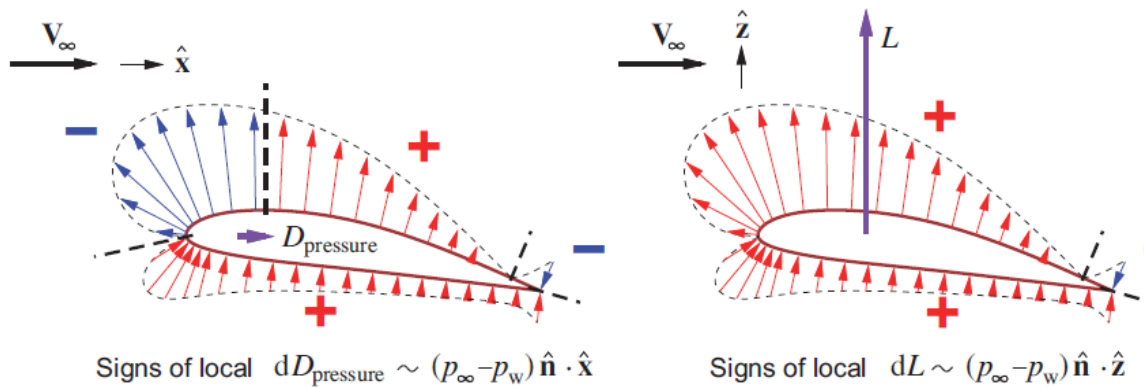


Figura 4.2. Distribuzione di pressione sul profilo alare [9]

4.1.2. Volume di controllo lontano dall'ala

In maniera differente dal paragrafo precedente il calcolo delle forze può anche avvenire considerando un volume di controllo più ampio, come mostrato in figura 4.3 in cui, nel nuovo sistema di riferimento, viene escluso il profilo alare.

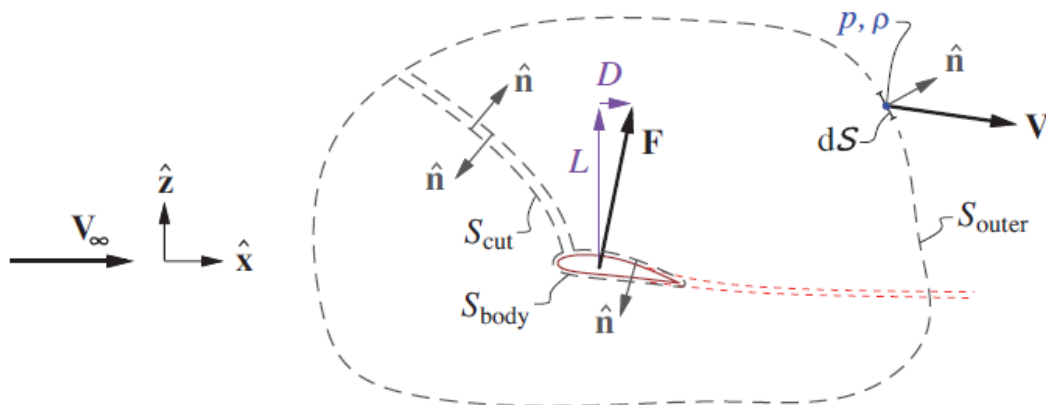


Figura 4.3. Volume di controllo lontano dall'ala [9]

L'assenza dell'ala nel nostro volume di controllo ci permette di enunciare che la quantità di moto si conserva ed è uguale a zero, ovvero:

$$\oint [\rho(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{V} + p \hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\tau}_w] dS = 0 \quad (4.14)$$

Se consideriamo tutte le aree in gioco l'equazione (4.14) può essere riscritta come:

$$\oint_{S_{outer}} [\rho(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{V} + p \hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\tau}_w] dS + \oint_{S_{body}} [\rho(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{V} + p \hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\tau}_w] dS + \iint_{S_{cut}} [\rho(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{V} + p \hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\tau}_w] dS = 0 \quad (4.15)$$

La costruzione del volume di controllo è stata fatta in modo tale che due superfici di taglio (S_{cut}) presentano stessa intensità ma con un valore del versore $\hat{\mathbf{n}}$ opposto (4.16) mentre la superficie del profilo (S_{body}) è stata costruita su punti attraverso i quali il fluido non

penetra ($\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$), di modo che i termini dell'equazione (4.15) possono essere riscritti come:

$$\iint_{cur} [\rho(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{V} + p \hat{\mathbf{n}} - \tau_w] dS = 0 \quad (4.16)$$

$$\oint\!\!\!\oint_{body} [\rho(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{V} + p \hat{\mathbf{n}} - \tau_w] dS = \oint\!\!\!\oint_{body} [p_w \hat{\mathbf{n}} - \tau_w] dS = \mathbf{F} \quad (4.17)$$

Con queste due ipotesi allora l'equazione che si ottiene è:

$$\mathbf{F} = \oint\!\!\!\oint_{outer} [(p_\infty - p) \hat{\mathbf{n}} - \rho(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\mathbf{V} - \mathbf{V}_\infty)] dS \quad (4.18)$$

Come fatto precedentemente sono stati inseriti nell'integrale i termini \mathbf{V}_∞ e p_∞ per la conservazione della massa nel sistema esterno e per il fatto che la pressione atmosferica uniforme non produce una forza netta sul corpo.

L'equazione (4.18) non presenta i termini viscosi che sono stati ritenuti trascurabili ed è valida per qualsiasi dimensione del volume di controllo; questa equazione è chiamata anche "equazione di conservazione della quantità di moto in forma integrale" [7].

4.2 Analisi delle forze per il caso dell'ala generica tridimensionale

Per il calcolo delle forze aerodinamiche [6] è necessario quindi creare un volume di controllo a forma di parallelepipedo con le facce perpendicolari alla disposizione degli assi xyz come mostrato in figura 4.3; l'unica componente resistiva sulla superficie del dominio infinitamente grande è presente in un punto $x=x_2$ lontano dall'ala.

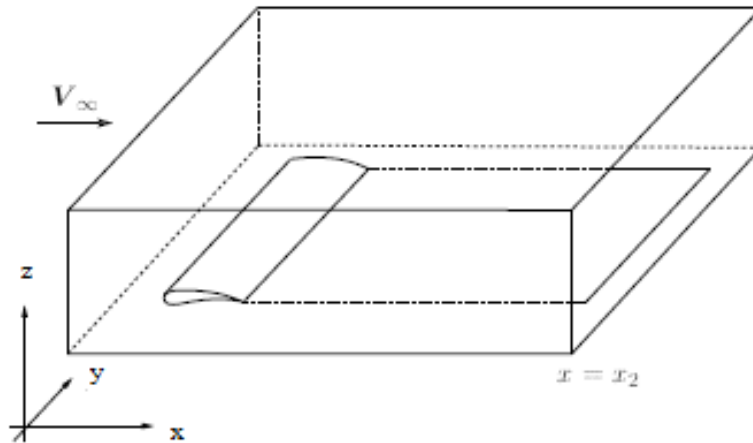


Figura 4.3. Dominio generato sull'ala tridimensionale [7]

Prima di calcolare su piano y-z le componenti della forza risultante, l'equazione della conservazione della quantità di moto è riscritta in funzione solamente della velocità visto che la differenza di pressione può essere sostituita con termini cinetici grazie all'equazione di Bernoulli:

$$p_\infty - p = \frac{1}{2} (\mathbf{V}^2 - V_\infty^2) \quad (4.19)$$

L'equazione della conservazione della quantità di moto risulta quindi:

$$\mathbf{F} = \oint_{outer} \left[\frac{1}{2}(\mathbf{V}^2 - V_\infty^2) \hat{\mathbf{n}} - \rho(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\mathbf{V} - \mathbf{V}_\infty) \right] dS \quad (4.20)$$

Conoscendo la forza vettoriale dall'equazione della conservazione della quantità di moto è possibile ricavare una formula per la resistenza analizzando solo la componente assiale della forza totale; sapendo che gli unici contributi che generano resistenza hanno termini quadratici ed escludendo i termini lineari, la resistenza risulta essere quindi:

$$D = -\rho \iint_{x=x_2} \left(u^2 - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) dydz \quad (4.21)$$

dove:

u = velocità assiale del flusso [m/s]

v = velocità trasversale del flusso [m/s]

w = velocità verticale del flusso [m/s]

Facendo lo stesso ragionamento per la portanza e la forza trasversale si possono ricavare le relative formule vedendole come proiezioni della forza totale lungo l'asse z e y . Come visto precedentemente, si considerano solo i termini lineari, ottenendo:

$$L = -\rho \iint_{x=x_2} w(V_\infty + u) dydz \quad (4.22)$$

$$Y = -\rho \iint_{x=x_2} v(V_\infty + u) dydz \quad (4.23)$$

Se nel caso bi-dimensionale la quantità di moto è la stessa in tutte le direzioni e per calcolare la portanza basta calcolare l'integrale del sistema che rinchioda la superficie, nel caso tri-dimensionale è necessario calcolare solo la quantità di moto nel piano $x = x_2$. In tale piano il potenziale risulta convergente ed il flusso predilige una direzione visto che negli altri piani le forze risultano nulle. Un'altra considerazione che si può osservare dalla formula della portanza è che il prodotto tra le velocità u e w risulta essere di ordine inferiore rispetto agli altri termini, per questo motivo la portanza (4.24) può essere approssimata come:

$$L = -\rho V_\infty \iint_{x=x_2} w dydz \quad (4.24)$$

Ricordando la relazione che lega la velocità con il potenziale la portanza risulta:

$$L = -\rho V_\infty \iint_{x=x_2} \varphi_z dydz \quad (4.25)$$

In questa maniera è possibile risolvere l'integrale lungo la coordinata z partendo dal potenziale lungo la superficie superiore fino all'infinito, stessa integrazione bisogna applicarla per la superficie inferiore:

$$L = -\rho V_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(\infty) - \varphi(-\infty) - \varphi^+ + \varphi^-] dy \quad (4.26)$$

Come detto in precedenza il potenziale risulta essere convergente all'infinito e per questo motivo i due contributi di $\varphi(\infty)$ e $\varphi(-\infty)$ s'annullano e la portanza può essere scritta in funzione del salto di potenziale attraverso la scia:

$$L = \rho V_{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\varphi(y) dy \quad (4.27)$$

Imponendo la condizione di Kutta [4] la portanza può essere espressa anche in funzione della circolazione:

$$L = \rho V_{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(y) dy \quad (4.28)$$

4.2.1. Analisi delle forze per il caso di ala allungata

È possibile ricavare una soluzione approssimata per il caso di un'ala molto allungata [6] per il calcolo delle forze visto che il problema del calcolo della scia è fattibile solo via numerica; in questo paragrafo si analizza quindi il caso di un velivolo che presenta un valore molto elevato del rapporto di allungamento definito come:

$$AR = b/\bar{c} \quad (4.29)$$

dove \bar{c} è il valore medio della corda. Prendendo quindi una generica ala allungata il flusso risulta essere bi-dimensionale lungo un piano x-z intorno ad una sezione dell'ala vicina, dopodiché il flusso passa ad una configurazione tri-dimensionale per poi ritornare bi-dimensionale lungo il piano y-z. Aumentando la distanza dal bordo di uscita la scia si deforma arrotolandosi intorno ai suoi estremi, tali vortici sono chiamati vortice d'apice. La condizione bi-dimensionale si configura maggiormente se si aumenta l'allungamento dell'ala; da questa condizione allora è possibile posizionare un piano z-y, chiamato anche "piano di Trefftz", con la scia uscente dal bordo d'uscita dell'ala proiettata su tale piano. Il comportamento del flusso per il caso di un'ala allungata è illustrato in figura 4.4.

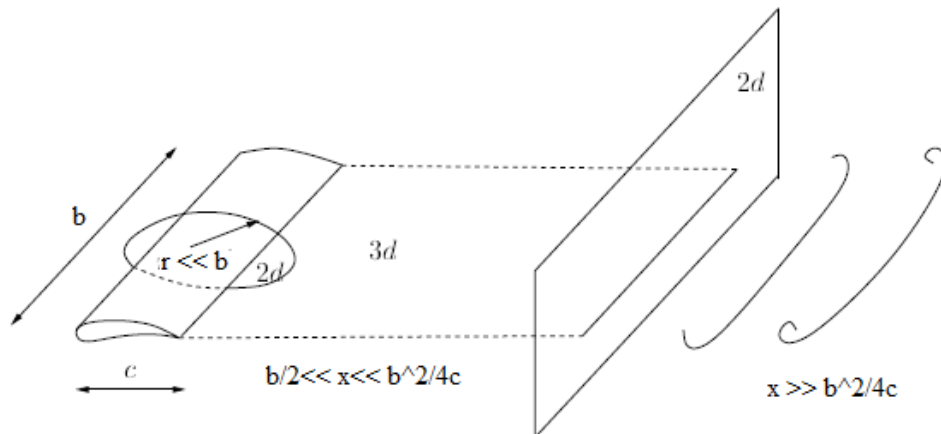


Figura 4.4. La scia per il caso dell'ala allungata [7]

Per poter stimare una distanza per il posizionamento del piano di Trefftz senza che la forma della scia si differenzi da quella a bordo d'uscita bisogna risolvere la seguente equazione:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} = \mathbf{V} \quad (4.30)$$

con λ un parametro. Se prendessimo come parametro l'asse delle x , allora avremo che:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{V_\infty + u} \quad (4.31)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{w}{V_\infty + u} \quad (4.32)$$

La presenza delle componenti trasversali di velocità (v e w) provoca la deformazione della scia dalla forma piana, per avere quest'ultima configurazione queste velocità devono essere nulle, ma essendo che gli ordini di grandezza delle velocità risultano:

$$w, v \sim \frac{V_\infty \bar{c}}{b} \quad (4.33)$$

quindi le velocità trasversali sono proporzionali alla velocità d'ingresso del flusso e all'apertura alare. Per tale motivo l'ordine di grandezza della distanza per la quale la scia inizia a deformarsi è:

$$y, z \sim \frac{\bar{c}}{b} x \quad (4.34)$$

Se dovessimo imporre la presenza un'ala di semi-apertura $b/2$, la scia inizia a deformarsi ad una distanza di ordine $b^2/4c$; quindi il corretto posizionamento del piano di Trefftz è quello per il quale la scia non è influenzata dagli effetti del campo vicino e dall'influenza dell'arrotondamento dell'estremità:

$$\frac{b}{2} \ll x \ll \frac{b^2}{4c} \quad (4.35)$$

4.2.2 Analisi forze e della velocità nel piano di Trefftz

Definito il posizionamento del piano di Trefftz in un punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$ [6], è conveniente analizzare le forze, portanza e resistenza, in tale piano in funzione dell'apertura alare.

Osservando l'indipendenza del piano di Trefftz dalla coordinata assiale si può presupporre che la velocità assiale u sia pari a zero, in riferimento all'equazione (4.28) e alla considerazione appena fatta è possibile scrivere la portanza come:

$$L = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (4.36)$$

Per quanto riguarda la resistenza è necessario svolgere qualche conto imponendo sempre che il disturbo di velocità assiale sia piccolo:

$$D = \rho \iint_{x=x_2} \frac{v^2 + w^2}{2} dy dz = \frac{\rho}{2} \iint_{x=x_2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi dy dz \quad (4.37)$$

A questo punto è necessario utilizzare l'identità vettoriale:

$$\nabla \varphi \cdot \nabla \varphi = \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) - \varphi \nabla^2 \varphi \quad (4.38)$$

Per moto irrotazionale ($\nabla^2 \varphi = 0$) l'ultimo termine a secondo membro s'annulla; a questo punto è possibile applicare il teorema della divergenza per passare ad un integrale chiuso:

$$D = \frac{\rho}{2} \iint_{x=x_n} \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dy dz = \frac{\rho}{2} \oint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \quad (4.39)$$

Una condizione fondamentale affinché si possa applicare il teorema di Gauss è che φ sia una funzione continua all'interno del volume di controllo mostrato in figura 4.9, con la scia raffigurata come un filamento rosso; si deve risolvere quindi l'integrale chiuso lungo tutte le superfici indicate nell'immagine (S_{outer} , S_{cut} , S_{body}).

La differenza di potenziale lungo l'area S_{outer} risulta nulla per la convergenza di questa grandezza all'infinito; stesso risultato si ha per S_{cut} in cui lungo le linee della superficie la differenza di potenziale risulta essere la stessa ma con il verso del versore normale opposto, quindi, anche per quest'area la resistenza indotta vale zero.

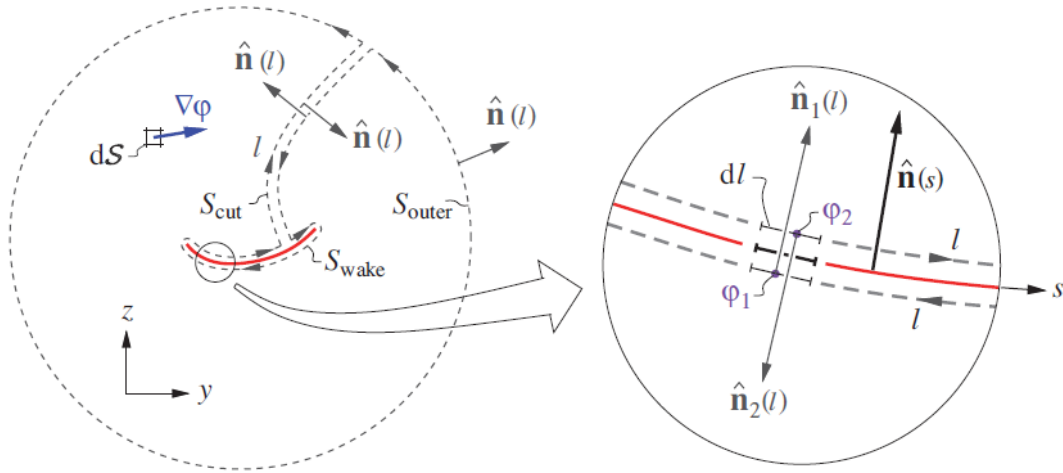


Figura 4.5. Sketch del filamento vorticoso nel piano di Trefftz [9]

Al contrario per l'area S_{wake} in cui la differenza di potenziale è data considerando il potenziale sia sulla superficie superiore che inferiore della scia:

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (4.40)$$

con

φ_1 = potenziale nella parte inferiore [m^2/s]

φ_2 = potenziale nella parte superiore [m^2/s]

Allora la resistenza indotta per un arco (4.41) può essere scritta come:

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{1}{2} \rho_\infty \int (\varphi_1 \nabla \varphi_1 \cdot \hat{n}_1 + \varphi_2 \nabla \varphi_2 \cdot \hat{n}_2) ds \\ D_i &= \frac{1}{2} \rho_\infty \int (\varphi_1 \nabla \varphi_1 \cdot \hat{n} - \varphi_2 \nabla \varphi_2 \cdot \hat{n}) ds \\ D_i &= \frac{1}{2} \rho_\infty \int_0^{s_{max}} \Delta \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \quad (4.41) \end{aligned}$$

In considerazione del fatto che la componente w della velocità attraverso la scia è continua (lo stesso non succede per il potenziale).

Questa relazione (4.42) applicata ad un'ala piana di apertura b risulta:

$$D_i = \frac{1}{2} \rho_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Delta\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial z} dy \quad (4.42)$$

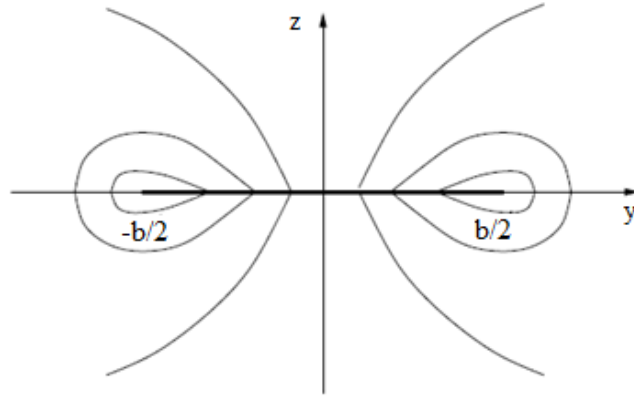


Figura 4.6. Comportamento qualitativo delle linee di corrente nel piano di Trefftz [7]

In figura 4.6. è riportato il comportamento delle linee di corrente nel piano di Trefftz in cui la scia è rappresentata come un segmento di spessore infinitesimo di lunghezza b ; l'indipendenza dalla componente x permette di scrivere la soluzione del problema di Laplace come:

$$\varphi_{zz} + \varphi_{yy} = 0 \quad (4.43)$$

Come è già stato valutato in precedenza il giusto posizionamento del piano di Trefftz ci permette di conoscere la forma della scia di un'ala piatta visto che non sono presenti deformazioni all'estremità; nel piano in x_2 la scia risulta essere un segmento di lunghezza pari all'apertura alare. Studiando il comportamento delle velocità, oltre alla conoscenza del campo di moto lungo la scia, è possibile valutare anche le forze visto che possono essere scritte in funzione del potenziale. Un approccio possibile per valutare il potenziale e le sue derivate sul segmento in $z=0$ che rappresenta la scia è possibile trasformare il segmento in un cerchio, tramite la trasformazione conforme di Joukowski (Fig. 4.7).

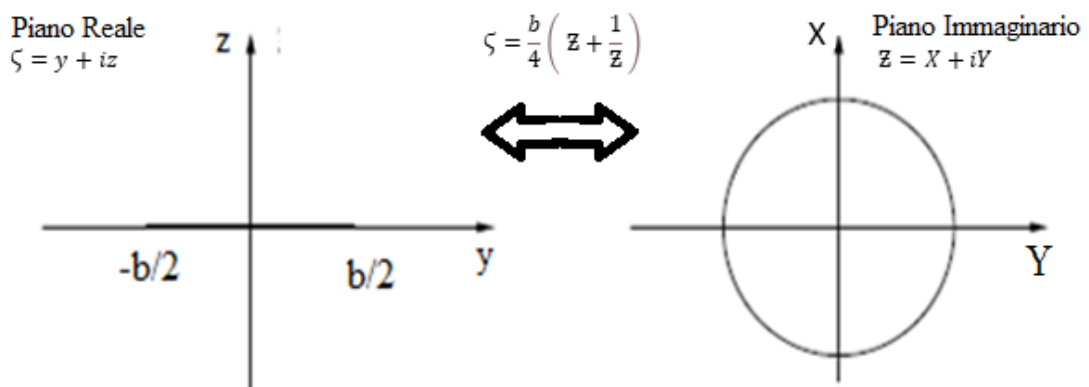


Figura 4.7. Passaggio da piano reale ad immaginario [7]

La trasformazione di Joukowski è esprimibile come:

$$\zeta = \frac{b}{4} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (4.44)$$

dove:

ζ = piano reale (y,z)

z = piano immaginario (Y, X)

Con questa formula si riesce a portare il segmento presente nel piano reale in un piano complesso in cui il segmento viene trasformato in cerchio di raggio unitario. I punti relativi ai due piani possono essere espressi come:

$$\zeta = y + iz \quad (4.45)$$

$$z = e^{i\vartheta} \quad (4.46)$$

Il problema nel piano immaginario è risolvibile tramite l'applicazione della formula di Schwarz con la quale è possibile trovare il potenziale complesso:

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint Re|F| \frac{z + z_0}{z - z_0} \frac{dz}{z} \quad (4.47)$$

dove F = potenziale complesso = $\varphi + i\Psi$.

Con tale sistema si conosce la parte reale del potenziale complesso che vale per la parte superiore e inferiore della circonferenza rispettivamente:

$$\varphi = \frac{1}{2} \Gamma(\theta) \quad (4.48)$$

$$\varphi = -\frac{1}{2} \Gamma(\theta) \quad (4.49)$$

Il potenziale complesso $F(z)$ è una funzione analitica all'esterno della circonferenza che può essere espresso come una serie di potenze:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad (4.50)$$

La parte reale di F che rappresenta il potenziale φ può essere riscritta come la somma del potenziale complesso e del suo coniugato:

$$\varphi(\theta) = \frac{F(e^{i\vartheta}) + F^*(e^{i\vartheta})}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n e^{-in\vartheta} + a_n^* e^{in\vartheta}) \quad (4.51)$$

dove F^* indica il potenziale complesso coniugato. Lungo la circonferenza la condizione al contorno per il potenziale risulta essere una funzione continua ed esprimibile come una serie Fourier:

$$Re|F| = \varphi(\vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\vartheta} \quad (4.52)$$

Visto che il potenziale è una funzione dispari allora la serie di Fourier [9] sul cerchio comprende solo la funzione seno ed è nulla per il termine $n=0$, quindi il potenziale può essere riscritto come:

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) \quad (4.53)$$

dove i coefficienti b_n sono costanti reali.

Per ricavare le costanti reali basta applicare la trasformazione inversa della (4.53) e usare le condizioni al contorno; inoltre, il potenziale può essere espresso in un'altra maniera applicando la trasformazione di Eulero:

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{in\theta} - e^{-ni\theta}}{2i} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} ib_n e^{-ni\theta} - ib_n e^{ni\theta} \quad (4.54)$$

Da quest'equazione, se confrontata con l'equazione (4.51), si ottengono delle relazioni fra i coefficienti a_n e b_n , grazie a questo confronto si ha che i coefficienti a_n del potenziale complesso sono numeri puramente immaginari:

$$a_n = ib_n \quad (4.55)$$

Quindi il potenziale complesso risulta:

$$F(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} ib_n Z^{-n} \quad (4.56)$$

Conoscendo quindi il potenziale nel piano complesso è possibile ricavare la velocità tramite la derivata di Z :

$$W = \frac{dF}{dZ} = \sum_{n=1}^{\infty} -nib_n e^{-i(n+1)\theta} \quad (4.57)$$

Per ricavare invece la velocità della scia nel piano reale ζ bisogna prendere la velocità immaginaria e dividerla per la derivata della trasformazione, ovvero:

$$\frac{d\zeta}{dZ} = \frac{b}{4} \left(1 - \frac{1}{Z^2}\right) \quad (4.58)$$

Sul cerchio unitario si ha:

$$\frac{d\zeta}{dZ} = \frac{b}{4} (1 - e^{-2i\theta}) \quad (4.59)$$

Se si raccoglie il valore $e^{-i\theta}$ è possibile applicare le trasformazioni di Eulero per ottenere la funzione seno; per ricavare le velocità trasversali nel piano di Trefftz bisogna quindi dividere la velocità complessa per la derivata della trasformazione di Joukowski:

$$v - iw = \frac{W}{\frac{d\zeta}{dZ}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} -nib_n e^{-i(n+1)\theta}}{\frac{b}{4} e^{-i\theta} 2i \sin\theta} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} -nb_n e^{-in\theta}}{\frac{b}{2} \sin\theta} \quad (4.60)$$

La componente reale nel piano reale risulta essere quindi la velocità lungo la scia mentre la componente immaginaria la velocità normale alla scia:

$$v = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} -nb_n \cos(n\vartheta)}{\frac{b}{2} \sin\vartheta} \quad (4.61)$$

$$w = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} -nb_n \sin(n\vartheta)}{\frac{b}{2} \sin\vartheta} \quad (4.62)$$

I risultati ottenuti verranno quindi inserite nelle equazioni trovate in precedenza della portanza e della resistenza; per riscrivere tutte le grandezze nel sistema di riferimento del piano immaginario è necessario anche trasformare il differenziale dy .

Dalla relazione tra piano immaginario e reale si calcola il valore di y sul segmento che risulta essere:

$$y = \frac{b}{2} \cos(\theta) \quad (4.63)$$

Quindi il differenziale di z è:

$$dy = -\frac{b}{2} \sin(\theta) d\theta \quad (4.64)$$

Da questa soluzione si può calcolare quindi il valore della portanza:

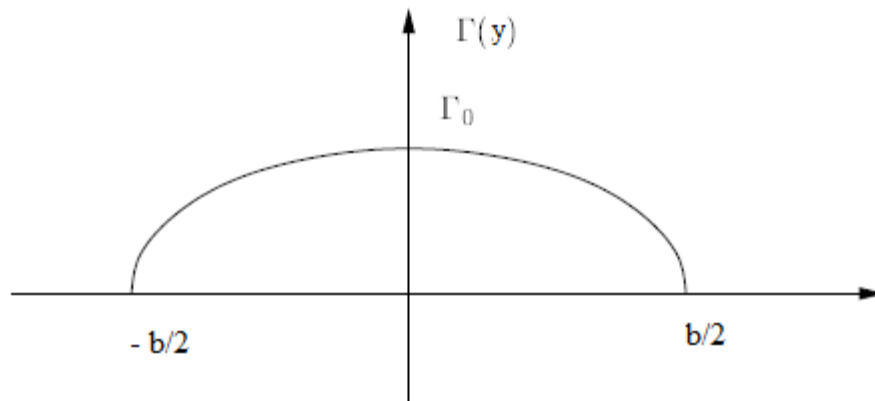


Figura 4.8. Distribuzione portanza sull'ala [7]

$$L = \rho V_{\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy = \rho V_{\infty} \int_{\pi}^0 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\vartheta) (-b \sin(\theta) d\theta) \quad (4.65)$$

Per l'ortogonalità delle funzioni seno l'unico contributo che non si annulla è quello per il valore di $n=1$, quindi:

$$\int_0^{\pi} \sin(\vartheta)^2 d\vartheta = \frac{\pi}{2} \quad (4.66)$$

$$L = \rho V_{\infty} b_1 \pi \frac{b}{2} \quad (4.67)$$

Per quanto riguarda alla resistenza si ha:

$$D = -\rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz = -\rho \int_{\pi}^0 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\vartheta) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-mb_m}{\frac{b}{2} \sin\vartheta} \sin(m\vartheta) \left(-\frac{b}{2} \sin\vartheta\right) d\vartheta \quad (4.68)$$

Si ottiene quindi che la resistenza è:

$$D = -\rho \int_{\pi}^0 \sum_{m,n=1}^{\infty} mb_n b_m \sin(n\vartheta) \sin(m\vartheta) d\vartheta \quad (4.69)$$

Il prodotto tra due serie di Fourier è nullo per valori differenti di n e m mentre gli integrali diversi da zero sono quelli per cui si ha $n = m$:

$$\int_0^{\pi} \sin(n\vartheta) \sin(m\vartheta) d\vartheta = \frac{\pi}{2} \delta_{m,n} \quad (4.70)$$

dove $\delta_{m,n}$ è il delta di Kronecker

Nella forma più compatta la resistenza si scrive in funzione di tutti gli n -esimi contributi del coefficiente b che risulta essere sempre positivo:

$$D = \rho \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} nb_n^2 \quad (4.71)$$

4.3. Ala ellittica



Figura 4.9. Supermarine Spitfire [10]

Un aereo avente le ali a forma di elisse, come molti velivoli durante il periodo della Seconda Guerra Mondiale (figura 4.9), presenta caratteristiche molto interessanti ed uniche rispetto ad altri profili alari visto che la velocità di downwash risulta costante su tutta l'apertura alare permettendo quindi di avere la condizione di minima resistenza indotta.

Per dimostrare questo fenomeno [6] è sufficiente imporre che l'ala presenti una distribuzione della circolazione con forma ellittica come raffigurato in figura 4.8, secondo la seguente equazione:

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \quad (4.72)$$

dove:

Γ_0 = valore massimo della circolazione [m^2/s]

Sapendo che la velocità di downwash è legata alla circolazione tramite la seguente relazione:

$$w_{wake} = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma}{y-y'} dy \quad (4.73)$$

per risolvere l'integrale è necessario applicare un cambio di variabile; fatto questo si ottiene:

$$w_{wake} = -\frac{\Gamma_0}{b} \quad (4.74)$$

La velocità presenta un valore fisso in cui è assente la coordinata y ; per tale ragione w_{wake} è costante su tutta l'ala. Questo risultato è ottenibile solo per questa tipo di configurazione. Un ulteriore possibile calcolo da fare riguarda l'angolo indotto:

$$\alpha_i = \frac{w_{wake}}{V_\infty} = -\frac{\Gamma_0}{bV_\infty} \quad (4.75)$$

L'angolo indotto rimane sempre proporzionale al coefficiente di portanza e s'annulla solo nel caso in cui l'ala non genera portanza, inoltre come nel caso della velocità di downwash l'angolo indotto risulta costante e indipendente dalla coordinata y .

Sostituendo la distribuzione ellittica della circolazione e il risultato della velocità indotta nell'equazione di Prandtl si ottiene:

$$\Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} = \frac{1}{2} a_0(y) c(y) \left(V_\infty \alpha(y) - \frac{\Gamma_0}{2b} \right) \quad (4.76)$$

dove:

a_0 = pendenza della curva di portanza nel piano c_l - α

$c(y)$ = distribuzione della corda

Γ_0 = circolazione iniziale

Se si assume che l'ala presenti lo stesso profilo alare in ogni punto e che l'angolo d'incidenza sia costante, l'equazione può essere risolta con una distribuzione di $c(y)$ del tipo:

$$c(y) = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \quad (4.77)$$

dove:

$$c_0 = \frac{4b\Gamma_0}{(2bV_\infty a_0 \alpha - a_0 \Gamma_0)} = \text{valore corda al centro [m]}$$

Tale risultato implica che per avere una distribuzione ellittica anche la corda deve presentare la stessa geometria della distribuzione della portanza; inoltre, se volessimo calcolare per questa configurazione il coefficiente di portanza, si ottiene che:

$$c_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = \frac{\pi\rho V_\infty b\Gamma_0}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = \frac{\pi b^2}{S} \left(\frac{1}{1 + \frac{4b}{a_0 c_0}} \right) \alpha \quad (4.78)$$

L'area per un'ellisse risulta:

$$S = \frac{\pi c_0 b}{4} \quad (4.79)$$

Quindi il coefficiente di portanza può essere riscritto come:

$$c_l = \left(\frac{a_0 \alpha}{1 + \frac{a_0}{\pi AR}} \right) \quad (4.80)$$

Sapendo che la pendenza per un profilo sottile (paragrafo 3.2) è costante e pari a 2π , l'equazione può essere modellata ottenendo:

$$\frac{c_l}{2\pi\alpha} = \left(\frac{AR}{2 + AR} \right) \quad (4.81)$$

Il risultato ottenuto è diagrammabile e si osserva dalla figura 4.9 che aumentando il rapporto di allungamento AR il valore del coefficiente di portanza per il caso ellittico cresce e si mantiene abbastanza costante per valore di AR superiori a 10.

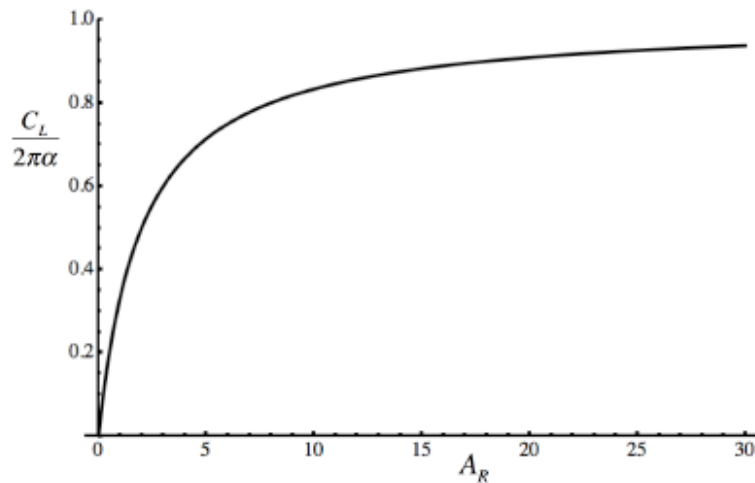


Figura 4.10. Relazione tra coefficiente di portanza e rapporto di allungamento [11]

Continuando con l'analisi di un'ala ellittica si passa allo studio della resistenza, in particolare per la resistenza indotta si ragiona sul fatto che questa forza può essere calcolata come:

$$D_i = F_\perp \sin(\alpha_i) = F_\perp \left(\frac{w}{V} \right) \quad (4.82)$$

dove:

$$F_\perp = \frac{\pi}{4} \rho V b \Gamma_0 = \text{forza perpendicolare al flusso [N]}$$

Quindi la resistenza risulta essere pari a:

$$D_i = \frac{\pi}{4} \rho w b \Gamma_0 \quad (4.83)$$

Il risultato ottenuto per la velocità di downwash per una configurazione ellittica è inseribile all'interno della formula della resistenza indotta ottenendo:

$$D_i = \frac{\pi}{8} \rho \Gamma_0^2 \quad (4.84)$$

Dividendo la resistenza indotta con la pressione dinamica si ricava quindi il coefficiente di resistenza indotta:

$$c_{di} = \frac{D_i}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma_0^2}{V_\infty^2 S} \quad (4.85)$$

Applicando lo stesso procedimento applicato per il calcolo della resistenza, la portanza può essere espressa come:

$$L = F_\perp \cos(\alpha_i) = \frac{\pi}{4} \rho V b \Gamma_0 \left(\frac{V_\infty}{V} \right) = \frac{\pi}{4} \rho V_\infty b \Gamma_0 \quad (4.86)$$

Dividendo questa forza con la pressione dinamica è ricavabile il coefficiente di portanza:

$$c_l = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma_0 b}{V_\infty S} \quad (4.87)$$

Notando che i due coefficienti posseggono grandezze comuni è possibile riscrivere un coefficiente in funzione dell'altro:

$$c_{di} = \frac{1}{\pi AR} c_l^2 \quad (4.88)$$

Da questa formula è possibile tracciare le curve polari di un'ala avente un determinato valore di AR. In figura 4.11 è rappresentato la curva polare di un'ala tri-dimensionale avente un AR pari a 5.

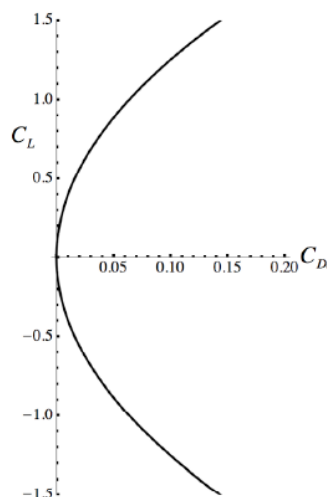


Figura 4.11. Curva polare di un'ala ellittica [11]

Anche il coefficiente di resistenza può essere espresso in funzione di AR come per il caso del coefficiente di portanza, si ricava dunque la seguente relazione:

$$\frac{c_{di}}{4\pi\alpha^2} = AR \left(\frac{1}{2 + AR} \right)^2 \quad (4.89)$$

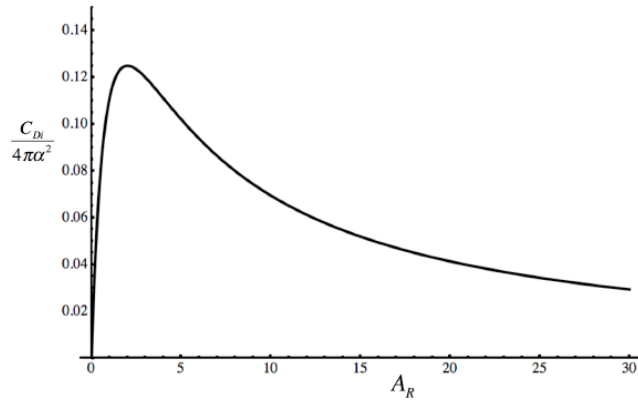


Figura 4.12. Legame tra coefficiente di resistenza e aspect ratio[11]

È chiaro anche in questo caso come l'aumento di AR provochi una diminuzione della resistenza indotta e che la migliore configurazione sia quella di un'ala con un maggior allungamento.

4.4. Condizione di allungamento

Riuscendo a scrivere il coefficiente di resistenza in funzione del coefficiente di portanza si riescono a tracciare le curve polari; inoltre, se viene analizzata una determinata ala con un allungamento $AR=E$ avente una nota distribuzione di portanza si riesce a ricavare il fattore correttivo δ rispetto al caso ideale. Da un noto valore del coefficiente di portanza si riesce a determinare il coefficiente di resistenza che è data dalla somma degli effetti della resistenza in condizioni bidimensionali e dalla resistenza indotta dalla resistenza:

$$c_d = c_{d,2d} + \frac{c_l^2}{\pi E} (1 + \delta) \quad (4.90)$$

Se si vuole ora comparare le resistenze totali dovuto ad uno stesso valore della portanza di due differenti ali che possiedono due valori differenti del fattore di allungamento si ha che:

$$c_{d,1} - c_{d,2} = c_{d,2d} + \frac{c_l^2}{\pi E_1} (1 + \delta) - c_{d,2d} - \frac{c_l^2}{\pi E_2} (1 + \delta) \quad (4.91)$$

Il coefficiente di resistenza dovuto alle condizioni bidimensionali è lo stesso per tutti i tipi di profili alari, se ritenuti profili sottili, mentre il coefficiente di portanza è possibile raccogliarlo in modo tale da ottenere una veloce comparazione della resistenza tra due ali differenti:

$$c_{d,1} - c_{d,2} = \frac{c_l^2}{\pi} (1 + \delta) \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \quad (4.92)$$

4.4.1 Analisi della retta $c_l - \alpha$

Se si analizzano meglio gli effetti di un'ala tri-dimensionale rispetto al caso bi-dimensionale si può notare una notevole variazione della pendenza della retta che lega il coefficiente di portanza con l'angolo d'incidenza. Dalla teoria dei profili sottili, infatti, si è riuscito a ricavare un valore della pendenza della retta che può essere definita con m_0 ; nel caso tridimensionale l'angolo visto dall'ala non risulta più essere quello d'incidenza α ma bisogna anche tenere conto dell'angolo indotto:

$$\frac{\partial c_l}{\partial(\alpha - \alpha_i)} = m_0 \quad (4.93)$$

Facendo l'integrale rispetto all'angolo effettivo si ottiene:

$$c_l = m_0 \alpha - m_0 \frac{c_l}{\pi E} (1 + \delta) \quad (4.94)$$

Dalla formula ottenuta se si deriva rispetto all'angolo d'incidenza si riesce a ricavare il valore della pendenza reale della retta presente nel diagramma $c_l - \alpha$:

$$\frac{\partial c_l}{\partial \alpha} = m \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial c_l}{\partial \alpha} = m_0 \alpha - m_0 \frac{1}{\pi E} \frac{\partial c_l}{\partial \alpha} (1 + \delta)$$

$$m = \frac{m_0}{1 + m_0 \frac{1}{\pi E} (1 + \delta)} \quad (4.96)$$

Dal risultato finale che si ottiene per il calcolo della pendenza finale mostrato in figura 4.13, si nota che il termine a denominatore è maggiore di uno; quindi, la pendenza della retta di un'ala tri-dimensionale è minore rispetto al profilo nel sistema bi-dimensionale.

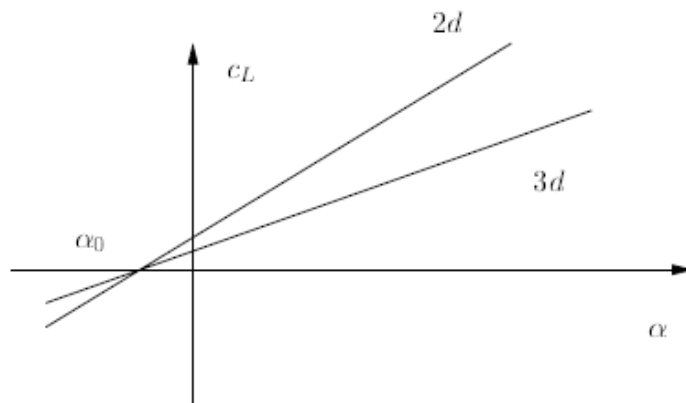


Figura 4.13. Curve $c_l - \alpha$ nel caso bi-dimensionale e tri-dimensionale [7]

Un altro fattore che comporta la variazione della pendenza della curva è il fattore di allungamento; infatti, per alti valori di questo fattore la pendenza aumenta ma per ali poco allungate la pendenza della retta diminuisce; inoltre, l'angolo per cui la portanza è nulla è uguale sia per il sistema bi-dimensionale che tri-dimensionale, per questo motivo le due rette s'intersecano lungo l'asse delle ascisse nello stesso punto.

4.5. Teorema di Munk

Questo teorema [6] serve ad individuare la condizione di minima resistenza per qualsiasi tipo di ala; per il caso dell'ala ellittica, che è la configurazione di ala che ha minima resistenza indotta, si può già osservare che la distribuzione della circolazione e della velocità sono costanti lungo l'ala.

Si considera la presenza di una perturbazione che genera una variazione di circolazione pari a $\delta\Gamma$, che provoca una variazione di resistenza δD_i ; riprendendo l'equazione della resistenza e riscrivendola in funzione della circolazione si ha che:

$$D_i = -\frac{\rho}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma(y')}{y' - y} dy' dy \quad (4.97)$$

Applicando l'integrazione per parti e conoscendo che la circolazione alle estremità dell'ala è nulla si nota che la parte d'integrazione finita sia pari a zero, si ricava quindi una formula della resistenza:

$$D_i = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y)}{dy} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y')}{dy'} \log|y' - y| dy' dy \quad (4.98)$$

La resistenza provocata dalla variazione di circolazione $\delta\Gamma$ associata alla perturbazione allora può essere espressa come:

$$\begin{aligned} \delta D_i = & \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y)}{dy} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\delta\Gamma(y')}{dy'} \log|y' - y| dy' dy \\ & + \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\delta\Gamma(y)}{dy} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y')}{dy'} \log|y' - y| dy' dy \end{aligned} \quad (4.99)$$

ovvero:

$$\delta D_i = \frac{\rho}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y)}{dy} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\delta\Gamma(y')}{dy'} \log|y' - y| dy' dy$$

Come visto per il caso dell'ala ellittica con questa formula si verifica che la resistenza minima si ha per una distribuzione di circolazione costante, ma imponendo i vincoli che all'estremità la circolazione è nulla si ottiene che in questo caso non è presente portanza. Bisogna imporre quindi un valore della portanza per escludere la soluzione banale, e questo si può fare introducendo un moltiplicatore di Lagrange λ associato alla portanza:

$$\begin{aligned} \delta(D_i + \lambda L) = & \frac{\rho}{2\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma(y)}{dy} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\delta\Gamma(y')}{dy'} \log|y' - y| dy' dy + \lambda \rho V_\infty \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \delta\Gamma(y) dy \\ & \delta(D_i + \lambda L) = \rho \int_{-b/2}^{b/2} w \delta\Gamma dy + \lambda \rho V_\infty \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \delta\Gamma(y) dy \end{aligned}$$

$$\delta(D_i + \lambda L) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho(\lambda V_\infty - w) \delta\Gamma(y) dy \quad (4.97)$$

per ottenere un valore della resistenza perturbata nulla il termine nella parentesi deve annullarsi, quindi:

$$\begin{aligned} \lambda V_\infty - w &= 0 \\ w &= \lambda V_\infty \quad (4.98) \end{aligned}$$

Questo risultato mostra infatti che per un dato valore della portanza la velocità verticale deve rimanere costante lungo l'apertura alare; per tale motivo nel caso in cui la configurazione non risulti piana si può applicare all'ala un angolo, detto "angolo di diedro", con lo scopo di mantenere la componente di velocità verticale costante.

Angolo Diedro



Figura 4.14. Angolo di diedro [12]

La condizione (4.98) è verificata per le ali ellittiche visto che tale configurazione, come è stato visto, presenta una velocità indotta indipendente dalla coordinata y rimanendo costante su tutta l'apertura alare. La configurazione dell'ala ellittica presenta quindi la condizione di minima resistenza indotta.

4.6. Ala rettangolare

In un'analisi effettuata sull'ala rettangolare [10] è stato studiato il comportamento della circolazione per differenti valori del rapporto di allungamento che per questa tipologia di ala è definito come segue:

$$P = \frac{2b}{\pi c} \quad (4.99)$$

Al variare di tale parametro, come mostrato in figura 4.15, la distribuzione della circolazione sull'ala è tale per cui il valore di b/c prossimo a zero fornisce una circolazione con un comportamento ellittico.

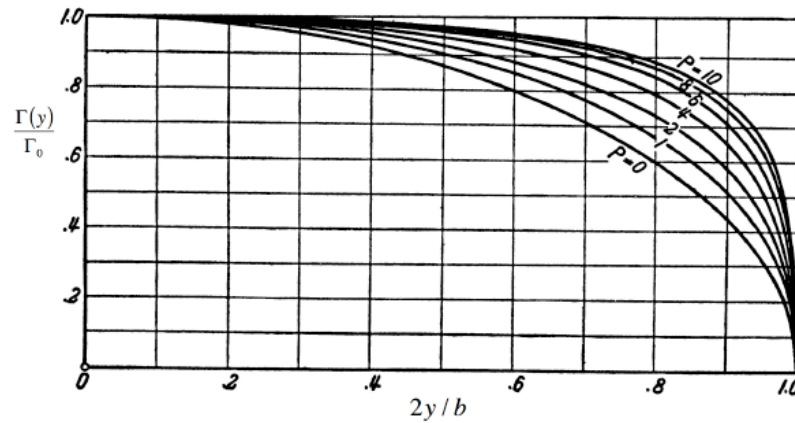


Figura 4.15. Distribuzione di circolazione per un'ala ellittica [11]

All'aumentare di P la curva della circolazione aumenta e per valori di b/c prossimi all'infinito si passa ad una configurazione bi-dimensionale dell'ala in cui la circolazione risulta costante su tutta l'ala. Secondo Prandtl, infatti, il comportamento della resistenza indotta per un'ala rettangolare non si discosta troppo dalla configurazione ellittica. In figura 4.16 viene raffigurato il tipico comportamento della portanza, della velocità indotta e della resistenza indotta per un'ala rettangolare.

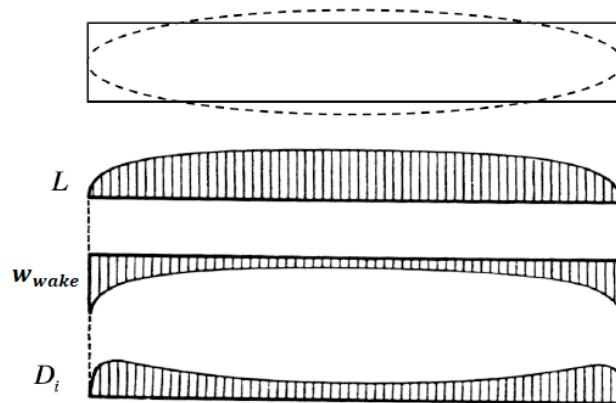


Figura 4.16. Comportamento grandezze relative all'ala rettangolare [11]

In riferimento alla figura 4.16 si nota che un'ala rettangolare presenta alti valori della velocità e della resistenza indotta rispetto al caso ellittico poiché è presente maggiore superficie all'estremità a parità di apertura alare. Viceversa al centro l'ala ellittica presenta una corda maggiore rispetto alla configurazione rettangolare, questa differenza permette quindi all'ala rettangolare di avere una condizione di minimo sia per la velocità indotta che per la resistenza. Per un rapporto di allungamento compreso tra uno e dieci è possibile ricavare una formula approssimativa del comportamento della resistenza indotta che risulta essere direttamente proporzionale a P come mostrato in figura 4.17.

$$1 < \frac{2b}{\pi c} < 10$$

$$\frac{D_i}{D_{imin}} = 0,99 + 0,015 \frac{2b}{\pi c} \quad (4.100)$$

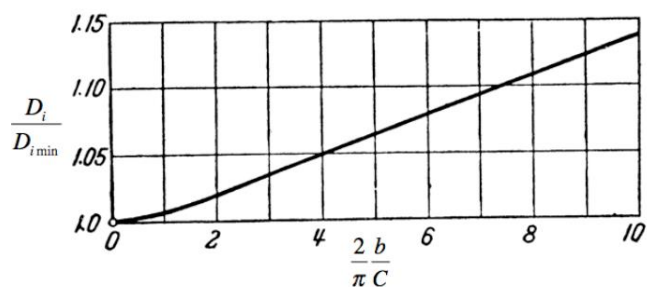


Figura 417. Resistenza indotta al variare dell'allungamento dell'ala per il caso rettangolare [11]

Anche per l'ala rettangolare la resistenza totale risulta essere data dalla somma del contributo dovuto alle perdite di profilo e dalla resistenza indotta; con questa considerazione è quindi possibile comparare le resistenze indotte di due ali rettangolare tramite l'equazione (4.92). Applicando quest'equazione è possibile unire in un'unica curva le curve polari di differenti ali nell'unica curva polare di un'ala avente un determinato valore di P ; il risultato di tale esercizio è mostrato in figura 4.18.

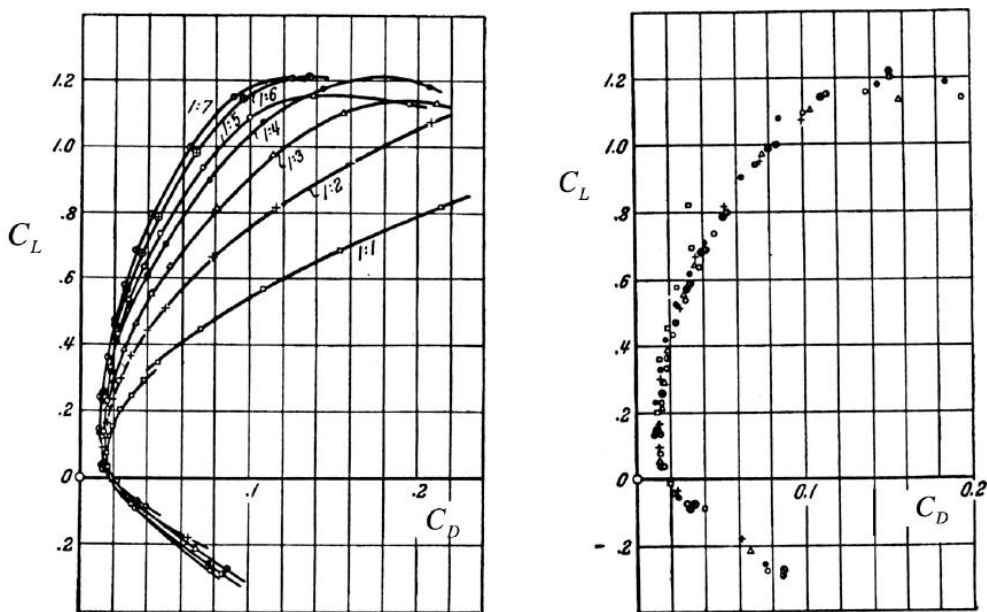


Figura 4.18. Unione di diverse curve polari in unica curva [11]

Questa conversione del calcolo di resistenza di un'ala ad un'altra è possibile applicarlo anche per la portanza, bisogna infatti sostituire nell'equazione del coefficiente di portanza l'equazione della velocità indotta in modo da ottenere:

$$\frac{w_{wake}}{V_{\infty}} = -\frac{c_l S}{\pi b^2} \quad (4.101)$$

Attraverso lo studio del triangolo di velocità è possibile approssimare per un basso angolo indotto il suo valore all'argomento dell'arcotangente; l'angolo effettivo può quindi essere riscritto come:

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i = \alpha + \frac{c_l S}{\pi b^2} \quad (4.102)$$

Se dovessimo paragonare due profili alare aventi stesso angolo di incidenza (α) ma differente allungamento si ha quindi:

$$\alpha_{eff_2} - \alpha_{eff_1} = \frac{c_{l_2} S_2}{\pi b_2^2} - \frac{c_{l_1} S_1}{\pi b_1^2} \quad (4.103)$$

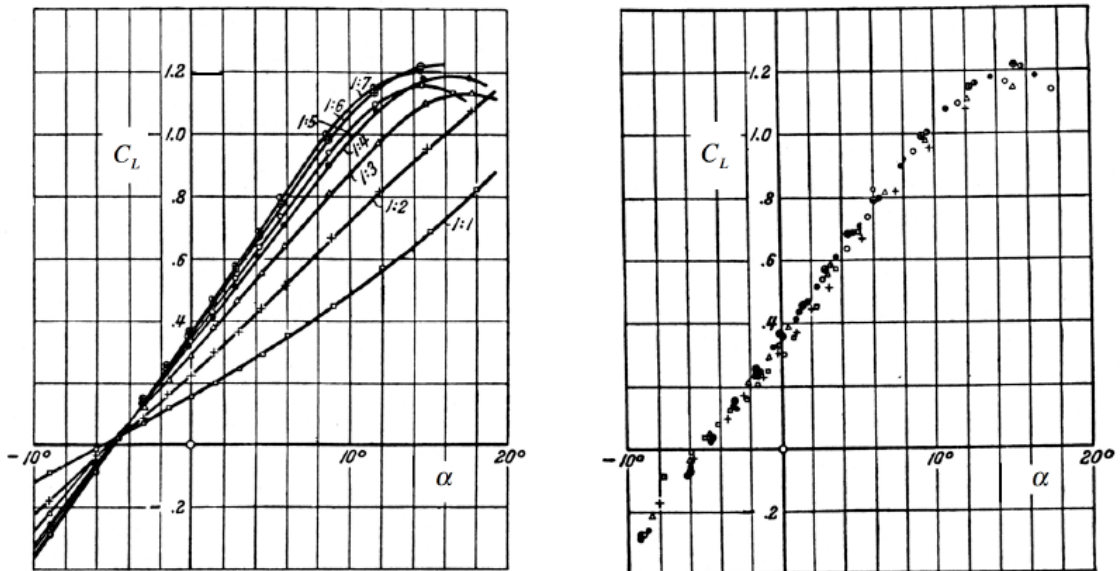


Figura 4.19. Conversione del coefficiente di portanza per ali con rapporto di allungamento differente [11]

In figura 4.19 vengono mostrate a sinistra il comportamento del coefficiente di portanza di differenti ali con diverso P mentre a destra tutte le ali analizzate sono confrontate e posizionate in unica retta nel diagramma del $c_l - \alpha$ per un'ala rettangolare con $P = 5$.

4.7. Deformazione della scia a distanze maggiori

Ad ora tutti i calcoli sviluppati sono stati effettuati ponendo il piano di Trefftz per distanze comprese tra $b/2$ e $b^2/4c$; per distanze maggiori le linee di corrente sono influenzate dalla velocità indotta provocando un abbassamento della scia al centro mentre un arrotondamento all'estremità. Tali vortici [6] si sviluppano con l'aumentare della distanza deformando completamente la scia; questi vortici si evolvono lentamente lungo l'asse x mentre le derivate di y e z rispetto a x hanno lo stesso ordine di grandezza del reciproco dell'allungamento.

Considerando i vortici come soggetti puntiformi distanti B dall'origine degli assi la circolazione risulta nulla esternamente alla scia mentre possiede un valore costante della circolazione all'interno della scia; questo comportamento della circolazione fa presupporre che il salto di circolazione sia concentrato nei vortici, questa schematizzazione è presentata in figura 4.20

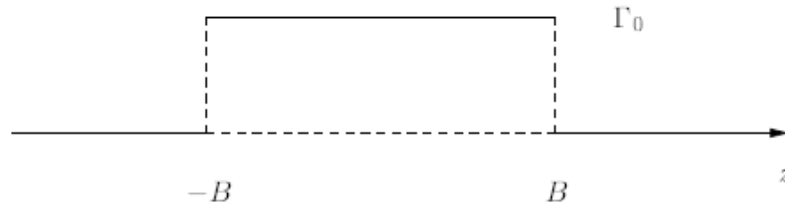


Figura 4.20. Salto di potenziale nella scia [7]

Nel caso in cui si voglia stimare la distanza dei vortici è necessario applicare la conservazione della quantità di moto in direzione normale alla corrente poiché il flusso di quantità di moto è indipendente dal posizionamento del piano. Bisogna quindi confrontare la portanza ottenuta nel piano di Trefftz con quella a valle dell'ala:

$$\rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \rho V_\infty 2B\Gamma_0 \quad (4.104)$$

Se dovessimo prendere come riferimento la distribuzione ellittica allora la portanza risulta:

$$2B\Gamma_0 = \Gamma_0 \int_{-b/2}^{b/2} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} dy = \frac{\pi}{4} b \Gamma_0 \quad (4.105)$$

Da questa relazione si riesce a ricavare quindi un legame tra la distanza tra i due vortici e la lunghezza della scia:

$$B = \frac{\pi}{8} b \quad (4.106)$$

È possibile, inoltre, calcolare la velocità indotta dei vortici tramite l'equazione (4.104) e conoscendo la variazione di circolazione facendo uso della delta di Dirac δ visto che la distribuzione della circolazione risulta essere a gradino:

$$\frac{d\Gamma}{dy} = \Gamma_0 \delta(y + B) - \Gamma_0 \delta(y - B) \quad (4.107)$$

Inserendo tale distribuzione nella formula della velocità indotta e ricordando che:

$$\int \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (4.108)$$

Si ottiene che la velocità indotta risulta:

$$w(y) = \frac{1}{2\pi} \Gamma_0 \left(\frac{1}{-B - y} - \frac{1}{B - y} \right) \quad (4.109)$$

Mentre la resistenza indotta risulta essere:

$$D = \frac{1}{4\pi} \rho \Gamma_0^2 \int_{-B}^{+B} \left(\frac{1}{B + y} - \frac{1}{y - B} \right) dy \quad (4.110)$$

Tale formula non comporta a nessuna soluzione visto che sono presenti i termini singolari $1/y$; ciò comporta che la resistenza risulterebbe infinita ma dal punto di vista scientifico ciò vuol dire che i vortici non riescono ad avvolgersi su sé stessi fino a diventare dei punti e che per il calcolo della resistenza è necessario la conoscenza della loro geometria.

L'unico calcolo fattibile è quello di confrontare la resistenza per il caso ellittico con una resistenza della scia integrando da $(-B + p)$ a $(B - p)$.

$$\frac{\pi}{8} \rho \Gamma_0^2 = \frac{1}{4\pi} \rho \Gamma_0^2 \int_{-B+p}^{+B-p} \left(\frac{1}{B+y} - \frac{1}{y-B} \right) dy \quad (4.111)$$

Si ottiene che:

$$\frac{p}{B} = \frac{2}{1 + e^{\pi^2/4}} \approx 0,156 \quad (4.112)$$

Il valore ottenuto fa capire la dimensioni siano ridotte e ciò comporta un'unione tra i due vortici per effetto della diffusione turbolenta all'interno degli stessi vortici.

4.8. Gli effetti della presenza della fusoliera

Una delle prime ipotesi fatte per studiare il comportamento dei vortici era la negazione degli effetti dovuti alla presenza della fusoliera del velivolo, questa ipotesi può risultare errata per il calcolo delle forze tramite il piano di Trefftz soprattutto se la fusoliera di un aereo è grossa come per il caso di aerei a scopo commerciale.

La fusoliera non genera forze che agevolano il volo del velivolo ma anzi l'unica forza presente è la resistenza di profilo, inoltre la presenza del corpo influenza le linee di corrente tanto da modificare la velocità media, la quale non possiede più la stessa direzione alle linee di corrente.

In prima approssimazione però si può fare riferimento alla teoria di Nikolski [11] in cui si analizza un corpo assialsimmetrico con velocità media parallela alle linee di corrente; tale configurazione è mostrata in figura 4.21 in cui metà corpo di un aereo è investita da un flusso.

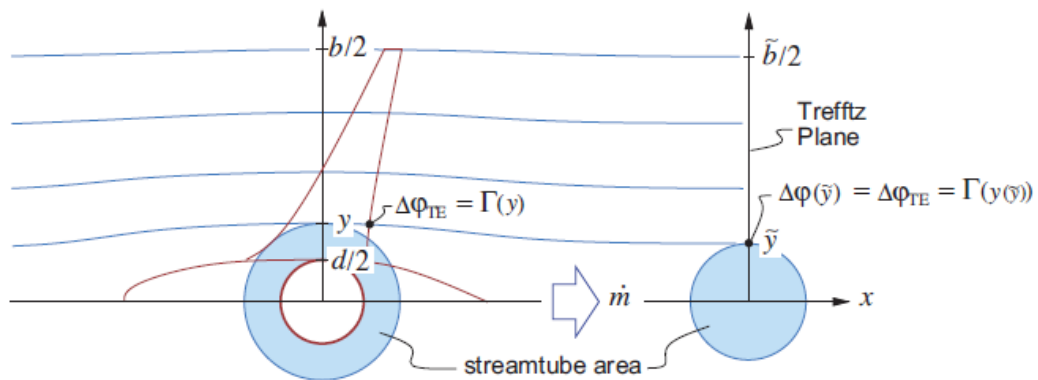


Figura 4.21. Schema di una scia influenzata dalla fusoliera [9]

L'analisi fatta da Nikolski inizia dalla conservazione della massa (4.113) tra la sezione trasversale del tubo di corrente e il piano Trefftz. In questa relazione cui viene inserito un parametro \tilde{y} che rappresenta la posizione della linea di flusso a seconda della posizione lungo l'asse y dell'ala:

$$m(y) = \rho_\infty V_\infty \pi \tilde{y}^2 \quad (4.113)$$

Dove:

$$\tilde{y}^2 = y^2 - \frac{d^2}{4} = \text{funzione corrispondente [m]}$$

d =dimensione fusoliera [m]

Imponendo una generica distribuzione della circolazione è possibile calcolare la differenza di potenziale. Facendo partire l'analisi dalla situazione più semplice si analizza il caso dell'ala ellittica; con questa condizione allora il potenziale risulta:

$$\Delta\varphi = \varphi_o \sin(\vartheta) = \Delta\varphi_o \sqrt{1 - \left(\frac{2\tilde{y}}{\tilde{b}}\right)^2} \quad (4.114)$$

Dove:

$$\Delta\varphi_o = 2\tilde{b}V_\infty \frac{C_l}{\pi AR} \quad \left[\frac{m^2}{s}\right]$$

$$\tilde{b} = \sqrt{b^2 - d^2} \quad [m]$$

Per ricavare la dimensione ristretta \tilde{b} dovuta dalla fusoliera bisogna applicare la funzione corrispondente all'estremità dell'ala b e della fusoliera d ; dopo aver calcolato questo parametro allora si passa a trovare il valore della portanza e della resistenza indotta dalle relazioni:

$$L = \frac{\pi}{4} \rho V_\infty \tilde{b} \Gamma_0 = \frac{\pi}{4} \rho_\infty V_\infty \tilde{b} \Delta\varphi_o \quad (4.115)$$

$$D_i = \frac{\left(\frac{L}{b}\right)^2}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \pi \left(\frac{\tilde{b}}{b}\right)^2} = \frac{D_{i_ala_ellittica}}{\left(\frac{\tilde{b}}{b}\right)^2} \quad (4.116)$$

Dove:

$$D_{i_ala_ellittica} = \frac{\left(\frac{L}{b}\right)^2}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \text{resistenza indotta caso ala ellittica [N]}$$

Essendo il rapporto $\frac{\tilde{b}}{b}$ un valore minore di uno si può intuire che la resistenza indotta a causa della contrazione delle linee di corrente dovute alla presenza della fusoliera sia maggiore della resistenza indotta del caso in cui non si considera la presenza della fusoliera.

4.9. Confronto tra ali aventi una configurazione piana

L'ala avente una forma ellittica presenta un comportamento ottimale rispetto a differenti configurazioni poiché, come è stato dimostrato, si ha il valore minimale della resistenza indotta.

In questo paragrafo si analizza quindi questa tipologia di profilo alare prendendo come riferimento tre ali aventi una configurazione piana in cui le caratteristiche generali aerodinamiche sono state studiate in precedenza.

Le tre ali presentano differenti aperture alari ma vincolate tra di loro dallo stesso valore della portanza e del momento flettente [7]; le tre ali sono state confrontate alla ellittica avente un'apertura alare b_1 e una resistenza indotta pari a D_{i1} , i grafici presentano lungo gli assi grandezze adimensionali con l'ala appena citata.

In figura 4.22 si nota infatti che la resistenza indotta delle tre ali sia evidenziata con tre punti di colori differenti e che il loro rapporto tra la resistenza calcolata e quella di riferimento diminuisca all'aumentare dell'apertura alare poiché un'ala con maggiore

apertura alare risente di minore influenza della presenza dei vortici, inoltre è facile da intuire che un'ala di lunghezza maggiore si avvicina al caso ideale dell'ala di lunghezza infinita.

Anche dalla formula si nota che aumentando la lunghezza dell'ala b la resistenza indotta diminuisce, tale riduzione è diagrammabile e presenta un comportamento ellittico visto che la resistenza indotta è inversamente proporzionale al quadrato del fattore b .

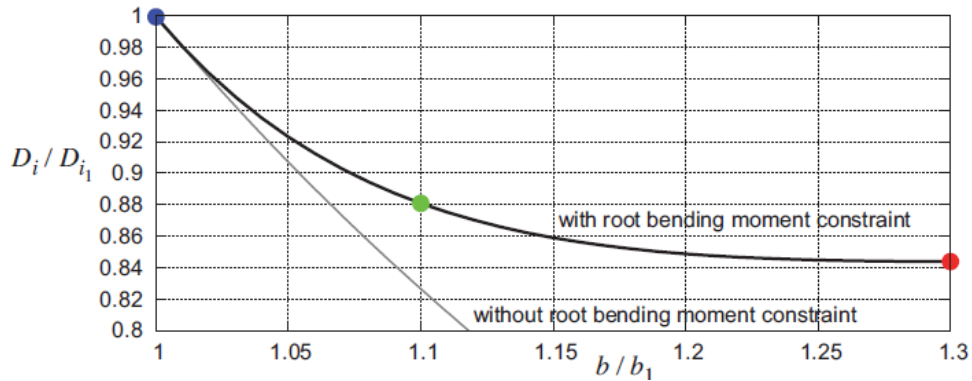


Figura 4.22. Analisi drag indotto da tre ali ellittiche differenti [9]

In figura 4.23 invece è presentato il comportamento della velocità del vortice w_{wake} e della differenza di potenziale $\Delta\phi$ per le tre configurazioni alari. L'ala ellittica come dimostrato in precedenza presenta un comportamento della velocità indotta costante su tutta l'ala mentre per quanto riguarda le ali rettangolari la velocità indotta assume un comportamento variabile e rettilineo comportando un'elevata disuniformità su tutta l'apertura alare.

Anche per quanto riguarda la differenza di potenziale l'ala ellittica presenta il comportamento migliore visto che questa grandezza rimanga quasi costante su tutta la superficie alare mentre per le ali rettangolari la differenza di potenziale è molto differente su tutta l'ala portando un eccesso di carico alla radice dell'ala.

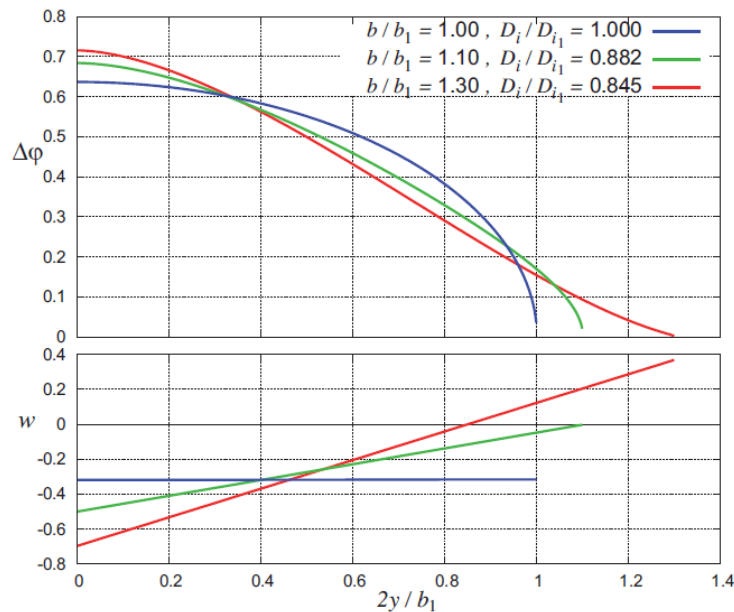


Figura 4.23. Comportamento della differenza del potenziale e della velocità di downwash lungo la corda delle tre ali [9]

Nonostante il fatto che l'ala ellittica rappresenti la migliore configurazione alare per le sue ottime caratteristiche aerodinamiche è poco utilizzata in ambito aeronautico poiché la costruzione della forma dell'ala è molto costosa e inoltre per elevati angoli d'incidenza lo stallo coinvolge tutta la sezione alare contemporaneamente. Per questi motivi allora si preferiscono strutture alari più economiche e in cui lo stallo inizi alla radice per poi svilupparsi all'estremità.

4.10. Analisi di superfici alari con winglets

In giorni odierni le ali presentano supporti sulle loro superfici per migliorare le condizioni aerodinamiche in fase di volo dell'aereo; quindi, tali sistemi devono essere studiati in modo da capire come possono essere applicati e come meglio disporli sulla superficie alare.

In maniera non troppo dettagliata si fa riferimento al caso di profili alari che presentano winglet [12], questi supporti hanno il compito di allungare la dimensione dell'ala diffondendo i vortici aumentando quindi la velocità dei vortici nel piano di Trefftz; questa soluzione comporta quindi sia una riduzione della resistenza indotta e sia a livello strutturale una diminuzione del momento flettente alla radice dell'ala.

In figura 4.24 sono mostrati i comportamenti di differenti aenti stesso valore di portanza e del momento flettente facendo variare l'altezza del winglet, a parità della dimensione dell'ala la resistenza indotta si riduce se viene aumentato la dimensione di tale supporto. Aumentando l'altezza del winglet a parità di apertura alare il vortice è all'estremità è più distante dall'influencare il flusso che sta investendo l'ala e il vortice risulta essere di dimensioni ridotte.

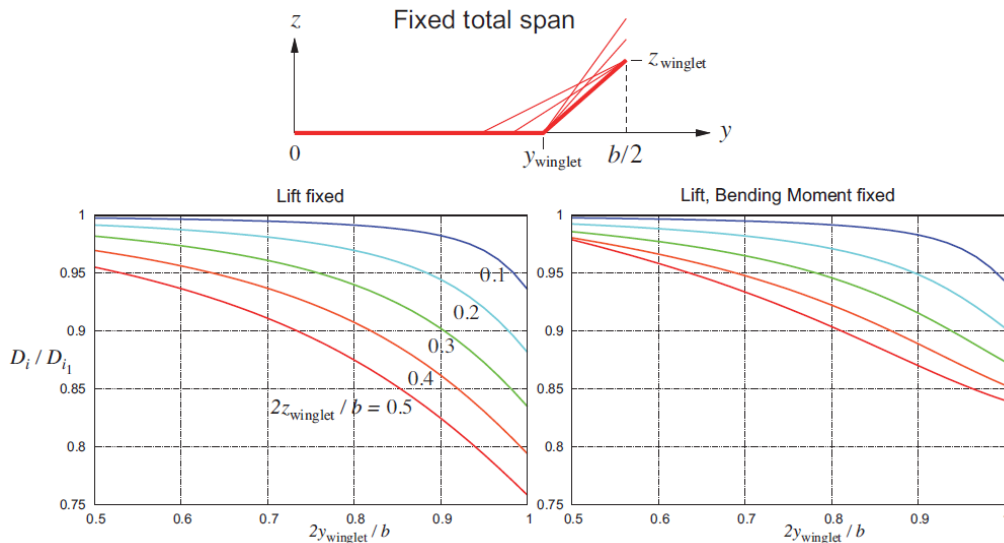


Figura 4.24. Analisi della resistenza indotta per tre ali ellittiche differenti, con winglet [9]

Un ulteriore studio sugli effetti del winglet sulla resistenza indotta è stato fatto sull'inclinazione di questi supporti rispetto all'ala facendo variare anche le sue dimensioni mantenendo costante la portanza e il momento flettente.

Come si può intuire dalle precedenti considerazioni a parità di inclinazione del winglet un'ala avente un supporto di maggiore dimensione possiede una resistenza inferiore poiché aumenta l'apertura alare, mentre a parità di dimensione del winglet se si incrementa l'inclinazione del supporto la resistenza indotta indotto aumenta poiché il flusso che

attraversa un winglet con apertura di 90° risente maggiormente degli effetti dovuti alla separazione dello strato limite del flusso. Quest'analisi è mostrata in figura 4.26.

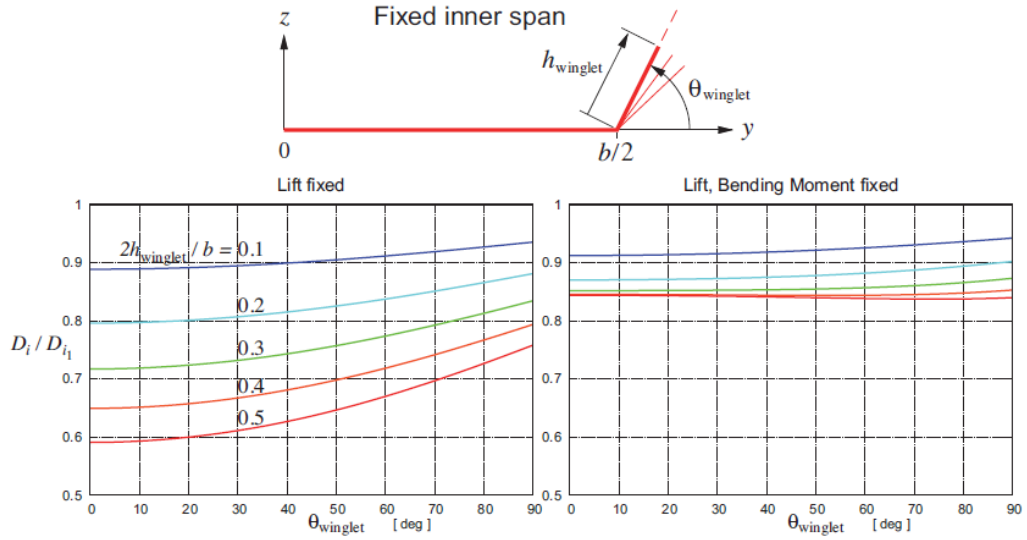


Figura 4.26. Analisi drag indotto da tre ali ellittiche differenti con winglet al variare dell'angolo d'inclinazione [9]

Gli effetti dei winglets sono inferiori rispetto all'aumento lineare dell'apertura alare; per questo motivo si predilige un incremento delle dimensioni dell'ala mentre l'utilizzo di questi supporti è preferito per strutture alari con ridotta apertura alare

V. Conclusione

L'impiego della teoria aerodinamica detta "del piano di Trefftz" risulta interessante visto che le analisi fatte dipendono da leggi fisiche ben definite, espresse tramite bilanci integrali; analizzando il campo di moto in tale è piano è quindi possibile ricavare una formula delle forze aerodinamiche su un'ala, tramite l'analisi di una scia prodotta da una superficie alare di dimensioni finite.

Riuscendo quindi a poter formulare la portanza e la resistenza indotta è possibile quindi anche ricavare le condizioni di minimo o di massimo di queste forze in funzione di qualsiasi parametro che si voglia analizzare.

Dalla trattazione si è vista la possibilità di analizzare qualsiasi struttura alare e confrontarle tra di loro nella fase di progettazione preliminare di un velivolo; questa possibilità permette al progettista di identificare superfici alari tali da permettere ad un velivolo di volare con resistenze ridotte; tale riduzione comporta una riduzione del consumo di carburante con benefici economici per il gestore del velivolo e benefici per quanto riguarda l'impatto ambientale.

L'applicazione del piano di Trefftz è possibile anche per configurazione alari complicate in cui sono presenti sistemi che migliorano l'aerodinamica del velivolo, quali flaps, winglets, canard o altre, ma anche per l'intera struttura dell'aeroplano. Quest'ultima applicazione comporta alla possibilità di cambiare, anche in modo lieve, la forma di un aereo per passare ad una configurazione che rende l'intero velivolo più efficiente dal punto di vista aerodinamico.

Bibliografia

- [1] A. Chorin, J.E. Marsden, *Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer, 2000
- [2] J.T. Blackmore (1972). *Ernst Mach; his work, life and influence*. University of California Press. p. 235
- [3] H. Glauert, *The effect of Compressibility on the lift of an airfoil*. Proc. Roy. Soc. London. vol. CXVIII, 1928, p. 113–119
- [4] J. D. Jr. Anderson (1989). *Introduction to Flight (3rd ed.)*. New York: McGraw-Hill.
- [5] J. Cantarella, D. De Turck e H. Gluck, *Vector Calculus and the Topology of Domains in 3-Space*, *The American Mathematical Monthly*, vol. 109, n. 5, 2002, pp. 409–442
- [6] P. Luchini e M. Quadrio, 2001-2002, *Aerodinamica*, ed. Politecnico di Milano
- [7] M. Drela, 2014, *Flight Vehicle Aerodynamics*, Cambridge, Massachusetts
- [8] J. le Rond d'Alembert, *Essai d'une nouvelle théorie de la resistance des fluides*, 1752
- [9] C. Cercignani, 1972, *Teoria e applicazioni della serie di Fourier*, Milano, Tamburini Editore
- [10] B. Cantwell, *Wings of finite span*, Chapter 12, Stanford University
- [11] A.A. Nikolski., 1959 *On lift properties and induced drag of wing fuselage combination*, NASA Technical Report
- [12] R.T. Whitcomb., 1976, *A design approach and selected wind-tunnel results at high subsonic speed for wing tip mounted winglets*, NASA Technical Note

Riferimenti Figure

- [1] <https://www.lavionnaire.fr/ItaAli.php>
- [2] <https://www.educazionetecnicaonline.com/2018/04/01/aerei/>
- [3] <http://www.dicat.unige.it/bottaro/aero.html>
- [4] <https://www.lalibertadivolare.it/come-volano-aerei>
- [5] <http://utenti.quipo.it/volare/airfoils.htm>
- [6] <https://it.quora.com/Quanto-influisce-leffetto-Coanda-sul-volo-degli-aerei-rispetto-all-effetto-Bernoulli>
- [7] P. Luchini e M. Quadrio, 2001-2002, Aerodinamica, ed. Milano
- [8] <https://aeromodellismo.altervista.org/i-vortici-alari>
- [9] M. Drela, 2014, Flight vehicle aerodynamics, Cambridge: Massachussets
- [10] <http://www.e-ser.eu/Aeronautica/sta109.htm>
- [11] Cantwell B., Wings of Finite Span, chapter 12, Stanford University
- [12] <http://www.fiammaero.it/scuola/scuo/corsobasico02.pdf>

Simbologia

Simboli

a_n	costante sviluppo serie di potenze
b	apertura alare [m]
b_n	costante sviluppo serie di Fourier
c	corda dell'ala [m]
\bar{c}	lunghezza corda media [m]
c_d	coefficiente di resistenza
c_l	coefficiente di portanza
$c_{l=0}$	coefficiente di lift per incidenza del flusso nulla
d	dimensione fusoliera [m]
e	efficienza di portata
f	fattore d'attrito
g	accelerazione gravitazionale [m/s ²]
l	portanza per unità di apertura alare [N/m]
m	massa [Kg]
\hat{n}	vettore normale
n	coordinata superficiale (nel sistema sln)
p_w	pressione superficiale [Pa]
p_∞	pressione atmosferica [Pa]
s	coordinata superficiale (nel sistema sln)
z	coordinate lungo l'asse verticale
\hat{z}	vettore asse z
x	coordinata lungo l'asse orizzontale
\hat{x}	vettore asse x
y	coordinata lungo l'asse trasversale
\hat{y}	vettore asse trasversale
u	velocità effettiva del flusso lungo l'asse x [m/s]
v	velocità effettiva del flusso lungo l'asse y [m/s]
w	velocità effettiva del flusso lungo l'asse z [m/s]
w_x	velocità vorticoso lungo l'asse x [rad/s]
w_{wake}	velocità di downwash [m/s]
A	attrito [N]
B	distanza dei vortici dall'origine [m]
D	resistenza [N]
$D_{friction}$	resistenza viscosa [N]
D_i	resistenza indotta [N]
$D_{i\ ellitca}$	resistenza indotta caso ala ellittica [N]
D_p	resistenza di profilo [N]
$D_{pressure}$	resistenza di pressione [N]
F	vettore forza [N]
$F_{friction}$	vettore forza viscosa [N]
$F_{pressure}$	vettore forza di pressione [N]
L	portanza [N]

N	Forza normale [N]
P	aspect ratio riferito all'ala rettangolare [m ²]
S	area trasversale dell'ala [m ²]
V	vettore velocità flusso [m/s]
V_{eff}	vettore velocità del flusso effettiva [m/s]
V_∞	velocità ingresso [m/s]
Y	forza trasversale [N]
W	forza peso [N]
α	angolo d'incidenza [°]
α_{aero}	angolo aerodinamico [°]
α_{eff}	angolo effettivo d'incidenza [°]
α_{geom}	angolo geometrico [°]
α_i	angolo indotto dalla portanza [°]
$\alpha_{L=0}$	angolo di zero portanza [°]
ρ	densità [Kg/m ³]
Γ	circolazione [m ² /s]
$\tilde{\nabla}$	gradiente superficiale
∇	gradiente
Δ	differenza
δ	fattore di resistenza
λ	moltiplicatore di Lagrange
τ_w	sforzo viscoso [Pa]
φ	potenziale [m ² /s]
γ	intensità vortice [m ³ /s]
ϑ	coordinata polare
ω	vorticità [m ³ /s]
C	sistema di riferimento reale
Z	sistema di riferimento complesso
F	potenziale nel sistema complesso

Apici e pedici

1	zona superiore all'ala
2	zona inferiore all'ala
∞	riferimento alle condizioni esterne/atmosferiche
d	riferimento alla resistenza
i	indotto dalla portanza
l	riferimento alla portanza
<i>l</i>	zona inferiore all'ala
u	zona superiore all'ala
z	riferimento asse cartesiano (nel sistema xyz)
x	riferimento asse cartesiano (nel sistema xyz)
y	riferimento asse cartesiano (nel sistema xyz)
w	riferimento legato agli effetti viscosi sulla parete
wake	riferimento alla scia

Abbreviazioni e acronimi

AR	rapporto di allungamento (anche chiamato <i>E</i> o <i>P</i> nel testo, in funzione della forma in pianta dell'ala)
L.E.	bordo d'ingresso dell'ala
T.E.	bordo d'uscita dell'ala